Mesure et Intégration

Exercice n 01 : (06 pts) 1

1) Mq $\forall A_i \in \mathcal{A}$ / $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$.

Considérons la famille (B_i) définie par

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$, $B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2)$ ..... $B_n = A_n - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ (0,5)

on a donc

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad (0,5)$$

de plus les ensembles $(B_i)_i$ sont des ensembles disjoints deux à deux

$$\text{d'où } \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \quad (0,5)$$

car $B_i \cap B_j = \phi$, $\forall i \neq j$ (0,5)

D'autre part $B_i \subset A_i$ $\forall i$ (0,5)

donc

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

(0,5)

(0,5)

2) D'après 1) on peut trouver une famille (B_i) de partie deux à deux disjoints

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad (0,5)$$

(0,5)

donc : $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) = \lim_{n \to +\infty} \sum \nu(B_i) = \lim_{n \to +\infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$$

(0,5) (0,5)

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \nu(X_n)$$

(0,5)

$\mathcal{T} = \{ A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ ; \ A = -A \}$

2

1°) $\phi \in \mathcal{T}$ car $\phi = -\phi$ ok

2°) si $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A = -A \Rightarrow A^c = (-A)^c$ ok

montrons que : $(-A)^c = -(A^c)$

soit $x \in (-A)^c \Leftrightarrow x \notin -A \Leftrightarrow -x \notin A \Leftrightarrow -x \in A^c$

$\Leftrightarrow x \in -(A)^c$

ok

et donc $\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$.

3°) soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T} \Rightarrow A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$

$\Rightarrow A_i = -A_i \ , \forall i \in I$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (-A_i)$

$= -\bigcup_{i \in I} A_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

donc $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de $\mathbb{R}$

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$$
$$x \longmapsto e^x$$

f est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{T})$ mesurable $\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$ $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

ie: $\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et on a :

$f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $f : x \longmapsto e^x$ est continue (ie mesurable)

et $g^{-1}(A)$ et $h^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car g et h sont continue

ok

3

2) $f, g, h \quad (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

on a : $f^{-1}(\{e\}) = \{1\}$

on a $\{e\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mais $\{1\} \notin \mathcal{T}$ $\{1\} \neq \{1\}$

$\Rightarrow f$ n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable OK

De même : $g^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{T} \Rightarrow g$ n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

et $h : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$x \longmapsto \cos x$

Soit :

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ montrons que

$$h^{-1}(A) = -h^{-1}(A)$$

$h^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \in A\}$ OK

$= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in A\}$

$-h^{-1}(A) = \{-x \in \mathbb{R} \mid x \in h^{-1}(A)\}$

$= \{-x \in \mathbb{R} \mid h(x) \in A\} = \{-x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in A\}$

$= h^{-1}(A)$ OK

car $\cos x = \cos(-x)$

d'où h est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$
$$x \longmapsto e^{x}$$

4

soit $A = \{-e, e\} \in \mathcal{B}$ car $A = -A$.

donc f n'est pas ~~m~~ $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ mesurable

0 V

$$g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$
$$x \longmapsto x^{3}$$

soit $A \in \mathcal{B} \mid g^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in A\}$

Mq : $g^{-1}(A) = -g^{-1}(A)$

0 V

$g^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in A\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^{3} \in A\}$

$-g^{-1}(A) = \{-x \mid x \in g^{-1}(A)\}$
$= \{-x \mid g(x) \in A\}$
$= \{-x \mid x^{3} \in A\}$

or $A = -A \Rightarrow x \in \mathbb{R} / x \in A \Leftrightarrow -x \in A$

ce qui donne $x \in g^{-1}(A) \Leftrightarrow -x \in g^{-1}(A)$
$\Leftrightarrow x \in -g^{-1}(A)$

0 V

$\Rightarrow g^{-1}(A) = -g^{-1}(A)$

$\Rightarrow g^{-1}(A) \in \mathcal{B}$

donc g est $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ mesurable et de même on montre

que h est $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ mesurable

$m = m_1 + m_2$ est une mesure

$$(m \text{ est une mesure}) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ m(\phi) = 0 \\ 2)\ m(\bigcup A_i) = \sum m(A_i) \end{cases}$$ 0,1

01) $m(\phi) = m_1(\phi) + m_2(\phi)$ 0,1

$= 0 + 0$

$\boxed{= 0}$

02) $m(\bigcup_{i \in I} A_i) = (m_1 + m_2)(\bigcup_{i \in I} A_i)$

$= m_1(\bigcup_{i \in I} A_i) + m_2(\bigcup_{i \in I} A_i)$ 0,1

$= \sum_{i \in I} m_1(A_i) + \sum_{i \in I} m_2(A_i)$

$= \sum_{i \in I} [m_1(A_i) + m_2(A_i)]$ car m_1 et m_2 sont positive.

$= \sum_{i \in I} (m_1 + m_2)(A_i)$.

II) Nous allons démontrer que cette égalité dans 4 étape

01) $f = 1\!\!1_A$, $A \in T$ 0,1

$$\int_E f \, d(m_1 + m_2) = \int_E 1\!\!1_A \, d(m_1 + m_2)$$

$$= \int_A d(m_1 + m_2)$$ 0,1

$$= (m_1 + m_2)(A)$$

$$= m_1(A) + m_2(A)$$

$$= \int 1\!\!1_A \, dm_1 + \int 1\!\!1_A \, dm_2$$

$$= \int f \, dm_1 + \int f \, dm_2$$

02) $f = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $A_i \in T$ et $A_i \cap A_j = \phi$ 0,5

$$\int_E f \, d(m_1 + m_2) = \int_E \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \, d(m_1 + m_2)$$ 6

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \mathbb{1}_{A_i} \, d(m_1 + m_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i} d(m_1 + m_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[(m_1 + m_2)(A_i) \right]$$ 0,5

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[m_1(A_i) + m_2(A_i) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_1(A_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_2(A_i)$$

$$= \int_E f \, dm_1 + \int_E f \, dm_2 .$$

03/ $f \geq 0$ donc $f = \lim_{n \to +\infty} \uparrow S_n$ 0,5

$$\int_E f \, d(m_1 + m_2) = \int_E \lim S_n \, d(m_1 + m_2)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_E S_n \, d(m_1 + m_2)$$ 0,5

$$= \lim_{n \to +\infty} \int S_n \, dm_1 + \lim_{n \to +\infty} \int S_n \, dm_2$$

$$= \int_E f \, dm_1 + \int_E f \, dm_2$$

04) f quelconque

- $f = f^+ + f^-$ 0,5

f^+ et f^- sont deux fonctions positives et mesurables

D'après l'étape 03 on a :

$$\int f^+ \, d(m_1 + m_2) = \int f^+ \, dm_1 + \int f^+ \, dm_2$$

$$\int f^- \, d(m_1 + m_2) = \int f^- \, dm_1 + \int f^- \, dm_2$$

$$\int f \, d(m_1 + m_2) = \int (f^+ - f^-) \, d(m_1 + m_2)$$

$$= \int f^+ \, d(m_1 + m_2) - \int f^- \, d(m_1 + m_2)$$

$$= \int f^+ \, dm_1 + \int f^+ \, dm_2 - \int f^- \, dm_1 - \int f^- \, dm_2$$

donc $m_1 + m_2$ est une mesure

$$= \left(\int f^+ \, dm_1 - \int f^- \, dm_1 \right) + \left(\int f^+ \, dm_2 - \int f^- \, dm_2 \right)$$

$$= \int (f^+ - f^-) \, dm_1 + \int (f^+ - f^-) \, dm_2$$

$$= \int f \, dm_1 + \int f \, dm_2$$