جامعة باتنة 1
كلية علوم المادة - قسم الفيزياء
السنة الأولى ماستر
شعبة الفيزياء
مسار الفيزياء النظرية

الإختبار النهائي في مقياس
الميكانيك الكمي المعمق 1

الإجابة النموذجية
جانفي 2017

التمرين الأول:

- الشرط الذي يجب أن يحققه مؤثر الإضطراب من أجل أن تكون نظرية الإضطراب صالحة للتطبيق في حالة وجود توالد في الحالات الذاتية للطاقة هو أن يكون مؤثرا قطريا في أساس الحالات الذاتية للهاملتوني غير المضطرب. 1.5
- التصحيح للطاقة من المرتبة الأولى في نظرية الإضطراب:

$$\Delta E^{(1)}=\langle 0|\hat{V}(x)|0\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_0(x)|^2V(x)\mathrm{d}x=V_0\frac{1}{\sqrt{\pi}x_0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/x_0^2}e^{-\beta^2x^2}\mathrm{d}x=V_0\frac{1}{\sqrt{\pi}x_0}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^2+\frac{1}{x_0^2}}}$$
2
$$=\frac{V_0}{\sqrt{1+x_0^2\beta^2}}$$

- يمكننا إيجاد تقريب لطاقة الحالة الأرضية باستخدام الطريقة التغيرية بـ:
  - اختيار دالة محاولة مقننة ψ_t ذات الوسيط α 1.5
  - حساب القيمة التوقعية $E(\alpha)=\langle\psi_t|\hat{H}|\psi_t\rangle$ 1.5
  - البحث عن قيمة α التي من أجلها يكون E أصغريا، و ذلك بحل المعادلة $\frac{\partial E}{\partial\alpha}=0$ و لتكن هذه القيمة هي α_0. القيمة التقريبية للطاقة الأساسية هي $E(\alpha_0)$. 1.5

التمرين الثاني:

إن سعة احتمال الإنتقال في الدرجة الأولى من نظرية الإضطراب هي

$$C^{(1)}_{|0\rangle\to|1\rangle}(t)=\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}e^{-i(E_0-E_1)t'/\hbar}\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{pert}}(t')|0\rangle\mathrm{d}t'$$
1
$$=\frac{1}{2}m\Omega_0^2\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}e^{-i(E_i-E_f)t'/\hbar}e^{-t'^2/\tau^2}\langle 1|\hat{x}^2|0\rangle dt'$$
1

نبحث عن العنصر المصفوفي $\langle 1|\hat{x}^2|0\rangle$. باستخدام مؤثرات الرفع و الخفض لدينا:

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{x_0}+i\frac{x_0}{\hbar}\hat{p}_x\right),\hat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{x_0}-i\frac{x_0}{\hbar}\hat{p}_x\right),\Rightarrow\hat{x}=\frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)$$
1

و منه

$$\langle 1|\hat{x}^2|0\rangle=\frac{x_0^2}{2}\langle 1|\hat{a}^2+(\hat{a}^\dagger)^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle=0$$
1

حيث جميع الأطراف معدومة بالتعامد، و استخدمنا علاقات الخفض و الرفع. و منه فإن احتمال الإنتقال معدوم، أي أن الجسيم لا يمكن أن يصعد إلى الحالة المثارة الأولى. 1

احتمال أن يكون الجسيم في الحالة المثارة الثانية عند $t \to \infty$:

$$C^{(1)}_{|0\rangle\to|2\rangle} = \frac{1}{2}m\Omega_0^2\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(E_0-E_2)t'/\hbar}e^{-t'^2/\tau^2}\langle 2|\hat{x}^2|0\rangle \mathrm{d}t' \qquad 1$$

حيث

$$\langle 2|\hat{x}^2|0\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle 2|\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle 2|(\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle 2|\hat{a}^\dagger|1\rangle = \frac{x_0^2}{2}\sqrt{2}\langle 2|2\rangle = \frac{x_0^2}{\sqrt{2}} \qquad 2$$

و بتعويض الطاقة $E_0 - E_2 = -2\hbar\omega$:

$$\begin{aligned} C^{(1)}_{|0\rangle\to|2\rangle} &= \frac{1}{2}m\Omega_0^2\frac{x_0^2}{\sqrt{2}}\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2/\tau^2+i2\omega t'}\mathrm{d}t' \qquad 1 \\ &= \frac{1}{2}m\Omega_0^2\frac{\hbar}{m\omega_0\sqrt{2}}\frac{1}{i\hbar}\tau\sqrt{\pi}e^{-\omega^2\tau^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}i}\frac{\Omega_0^2}{\omega_0}\tau e^{-\omega^2\tau^2} \qquad 1 \end{aligned}$$

حيث قمنا بتعويض عبارة x_0. و منه فإن احتمال الإنتقال هو:

$$P^{(1)}_{|0\rangle\to|2\rangle} = \frac{\pi}{8}\frac{\Omega_0^4}{\omega_0^2}\tau^2 e^{-2\omega^2\tau^2} \qquad 2$$