Université A. Mira - Bejaia **le 10/03/2020**
Faculté des Sciences Exactes
$3^{ème}$ année licence Mathématiques

Examen mesure et intégration
(Durée 1 heure 30 minutes)

Questions de cours.(06 points)
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Décrire les espaces $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Rappeler le critère de mesurabilité d'une application $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis donner un exemple d'une application non mesurable.
3. Donner un sous ensemble de $\mathbb{R}$ de mesure nulle et qui n'est pas dénombrable.
4. Si on note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on sait que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$. Dites alors où est le problème dans l'écriture suivante
$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = 0. \tag{1}$$
5. Déterminer la section de $[0, 1] \times [1, 2]$ selon $x = 2$.
6. Est ce que $\mathcal{B} = \{A \times \mathbb{R},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}^2$?

Solution .1

1. *L'espace $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace des fonctions mesurables qui sont intégrables. Donc*
$$\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : M(E, \mathbb{R}),\ \int_E |f|\, d\mu < \infty \right\}$$
L'application qui à
$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_E |f|\, d\mu \tag{2}$$
définie une semi norme sur $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

   L'espace $L^1(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) \backslash (= \mu{-}p.p) = \left\{\overline{f},\ f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)\right\}$, $\overline{f}$ désigne la classe d'équivalence relativement à la relation d'équivalence "égalité $\mu - p.p.$"

   L'application (2) est une norme sur $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.
2. *L'application $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable ssi $\{f \leq a\ , \forall a \in \mathbb{R}\}$ est mesurable.*

   Exemple d'application non mesurable : on sait qu'il existe une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas Lebesgue mesurable, donc la fonction indicatrice de cette partie n'est pas mesurable.

3. *L'ensemble de Cantor est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ de mesure nulle et qui n'est pas dénombrable.*

4. *la formunle (1) n'est pas vraie car la réunion n'est pas dénombrable.*

5. *Déterminons la section de $[0,1]\times[1,2]$ selon $x=2$.*

   On appelle section de $A\subset\mathbb{R}^2$ selon x ou $x-$section de A et on note A_x le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$A_x=\{y\in\mathbb{R},\ tq\ (x,y)\in A\}.$$

   Donc

$$([0,1]\times[1,2])_x=\{y\in\mathbb{R},\ tq\ (2,y)\in[0,1]\times[1,2]\}=\emptyset.$$

6. *La famille $\mathcal{B}=\{A\times\mathbb{R},\, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}^2$.*

   Vérifiant les trois propriétés qui caractérisent une tribu.

   (a) $\mathbb{R}\in\mathcal{B}$ *car* $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, *avec* $\mathbb{R}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

   (b) *Soit $B\in\mathcal{B}$ montrons que $B^c\in\mathcal{B}$. On a $B\in\mathcal{B}$ alors par définition $B=A\times\mathbb{R}$, $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors*

$$B^c=A^c\times\mathbb{R}$$

   Comme $A^c\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alos $B^c\in\mathcal{B}$.

   (c) *Si $B_n\in\mathcal{B}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrons que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}B_n\in\mathcal{B}$. On a $B_n\in\mathcal{B}$ alors par définition $\forall n\in\mathbb{N}, B_n=A_n\times\mathbb{R}$ alors,*

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}B_n=\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}(A_n\times\mathbb{R})=\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}(A_n)\times\mathbb{R}$$

   alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}A_n\in\mathcal{B}$.

   Donc $\mathcal{B}$ est une tribu sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1. (07 *points*)

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
Soit μ la mesure définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$\mu=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\delta_k$$

δ_k est la masse de Dirac au point k avec k un entier naturel.

1. *Calculer $\mu(\{0,n\})$, $n\in\mathbb{N}^*$.*

2. *Calculer $\mu(\mathbb{N})$ et $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})$.*

3. *On considère la suite de fonctions réelles $f_n : x\to\chi_{[0,n]}(x)$*

   (a) *Justifier que f_n est borélienne pour tout entier naturel n .*

(b) *Est ce que* f_n *est continue* $\mu-p.p$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*

(c) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\mu.$

Solution .2 1. *Calculons* $\mu\left(\{0,n\}\right),\ n\in\mathbb{N}^*.$

$$\begin{aligned}\mu\left(\{0,n\}\right) &= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\delta_k\left(\{0,n\}\right)\\ &= \frac{1}{e}\left(\delta_0\left(\{0,n\}+\delta_1\left(\{0,n\}\right)\right.\right.\\ &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

2. *Calculons* $\mu\left(\mathbb{N}\right)$ *et* $\mu\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\right)$.

$$\begin{aligned}\mu\left(\mathbb{N}\right) &= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\delta_k\left(\mathbb{N}\right)\\ &= \frac{1}{e}\left(\delta_0\left(\mathbb{N}+\delta_1\left(\mathbb{N}\right)+....\delta_k\left(\mathbb{N}\right)+....\right.\right.\\ &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....\right)=\frac{1}{e}.e=1.\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ *ne contient aucun entier naturel alors* $\mu\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\right)=0.$

On considère la suite de fonctions réelles $f_n : x\to\chi_{[0,n]}(x)$

1. $f_n=\chi_{[0,n]}$ *est borélienne pour tout entier naturel* n *car [0,n] est borélien.*

2. f_n *n'est pas continue* $\mu-p.p$ *sur* $\mathbb{R}$ *car* $\mu\left(\{0,n\}\right)\neq 0$

3. *Calculons* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\mu$. *La suite* $(f_n)_n$ *est croissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=\chi_{[0,+\infty[}$ *alors d'après le théorème de la convergence monotone*

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\mu =$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\chi_{[0,+\infty[d\mu}=\mu(\mathbb{R}^+)=1$

Exercice 2. (07 *points*)

Soit F *la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par*

$$F(t)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

1. *Montrer que* F *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *puis calculer* $F'(t)$.
2. *Calculer* $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$.
3. *Déterminer* $F(t)$.

Solution .3 *Pour* $t>0$, *on a*

$$F(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

On pose pour $t\in\,]0,+\infty[$ *et* $x\in\,]0,+\infty[$

$$f(t,x)=e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}$$

1. *La fonction* $t\mapsto f(t,x)$ *est continuement dérivable sur* $]0,+\infty[$.

   (a) *Soit* $t\in[a,b]$, $0<a<b$ *alors*

   $$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right|=\left|-xe^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}\right|=\left|e^{-tx}\sin(x)\right|\leq e^{-ax}=g(x)\;......(1,5\ point)$$

   La fonction g *est intégrable sur* $]0,+\infty[$. *En effet,*

   $$\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx=\frac{1}{a}.$$

   Alors d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale F *est dérivable et* $F'(t)=\int_0^{+\infty} e^{-ax}sinxdx$ ...... $(0,5\ point)$

   (b) *Calculons* $F'(t)$ *par parties*

   $$\begin{aligned}F'(t)&=-\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x dx\\&=[-e^{-tx}\cos x]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos x dx\\&=1-t[-e^{-tx}\sin x]_0^{+\infty}-t\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x dx\end{aligned}$$

   Ce qui donne $(1+t^2)\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x dx=-1$.

   Par conséquent

   $$F'(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x dx=\frac{-1}{1+t^2}$$

(c) *Calculons* $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$.

On a

$$\begin{aligned} 0 \leq |F(t)| &\leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}|\frac{\sin(x)}{x}|dx \\ &\leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}dx = [-\frac{1}{t}e^{-tx}]_0^{+\infty} \\ &\leq \frac{1}{t} \to 0 \;\; t\to+\infty \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

(d) *Déterminons* $F(t)$.

On a $F^{'}(t) = \frac{-1}{1+t^2}$, *donc* $F(t) = -arxtan(t) + c$.

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 0$. *Alors* $C = \frac{\pi}{2}$