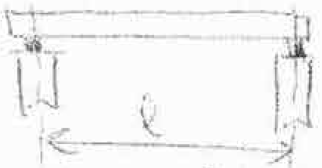
Chapitre IV. Les Poutres

1/ Généralités

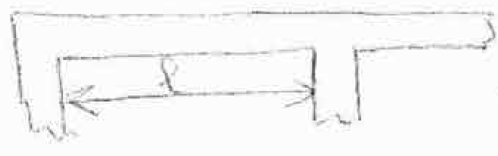
Dans ce chapitre nous nous intéresserons aux poutres continues qui peuvent être solidaires ou non à leurs appuis. On admettra que la poutre est simple si elle se compose d'une travée unique et continue si elle se compose de plusieurs travées !
La Portée l de la travée sera mesurée en fonction du système d'appuis.

* Poutre non solidaire aux appuis



l = Distance entre-axes des appuis.

* Poutre solidaire des appuis.



l = Distance à nu d'appuis

2/ Prédimensionnement.

En ce qui concerne la hauteur h et la largeur b d'une poutre, il sera plus économique de prévoir une poutre plutôt haute que plate (large), cette dernière est plus coûteuse en Acier et difficile à ferrailler et à bétonner, en plus de sa faible rigidité. Pour une poutre rectangulaire et pour les constructions courantes, la hauteur h peut être estimée dans la fourchette suivante en fonction de la portée l :

$$\boxed{\frac{l}{15} \leq h \leq \frac{l}{10}}$$

La largeur b de la poutre est estimée en fonction de la hauteur h et peut être estimée à l'intérieur de la fourchette :

$$\boxed{0{,}6\,h \le b \le h}$$

Toutefois le RPA99 version 2003 préconise :

$h \geq 30cm$

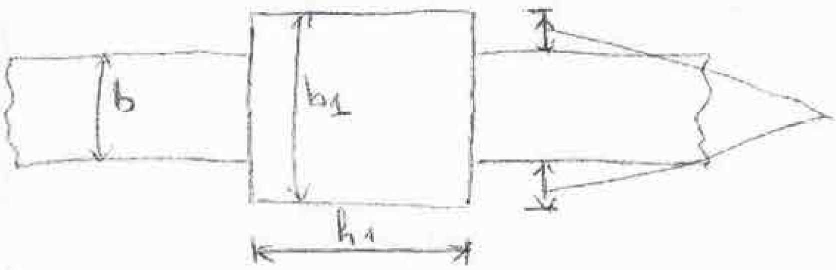
$b \geq 20cm$

$h/b \leq 4$

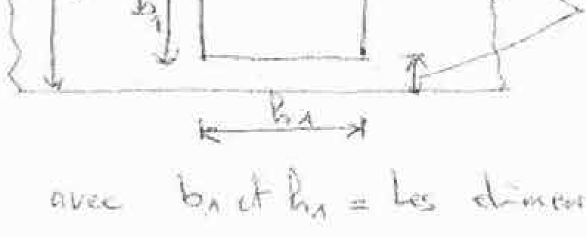
$b_{max} \leq 1{,}5\,h + b_1$

et h peut être ramenée à 20cm dans les ouvrages contreventés par voiles.

La poutre peut avoir des dimensions plus ou moins larges par rapport au poteau à condition de respecter les dimensions suivantes :



$\leq Max\left(\frac{b_1}{2} \text{ et } \frac{h_1}{2}\right)$



$\leq Max\left(\frac{b_1}{2} \text{ et } \frac{h_1}{2}\right)$

avec b_1 et h_1 = les dimensions du poteau.

3/ Charges

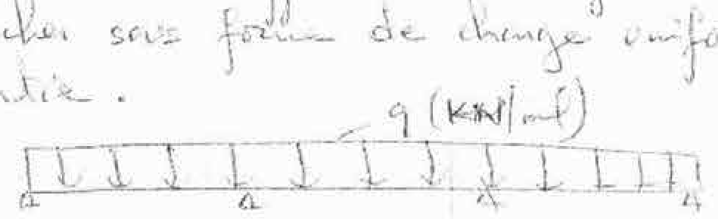
Les charges transmises de la dalle vers les poutres porteuses sont habituellement constituées de charges permanentes (généralement le poids propre) et de charges d'exploitation. Elles peuvent être aussi des charges climatiques (neige). La charge permanente totale supportée par la poutre comprend son poids propre et celle transmise par le plancher. Cette dernière dépend de la nature du plancher et des dimensions des panneaux de dalle.

3.1/ Dalle travaillant suivant une seule direction :

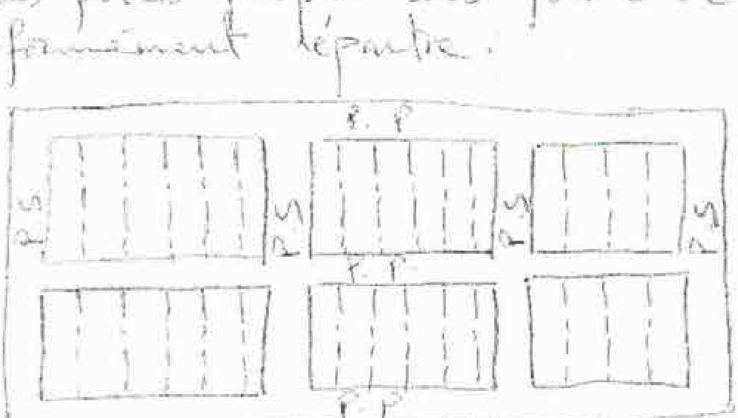
a/ Cas du plancher corps creux :

La disposition des poutrelles sur les poutres donne résultat à deux types de poutres :

* poutres porteuses : celles qui supportent les poutrelles elles auront à supporter la charge totale du plancher sous forme de charge uniformément répartie.



* poutres non-porteuses : celles qui ne supportent pas les poutrelles. Elles ne reçoivent aucune charge du plancher. Elles ne supporteront que leurs poids propre sous forme de charge uniformément répartie.

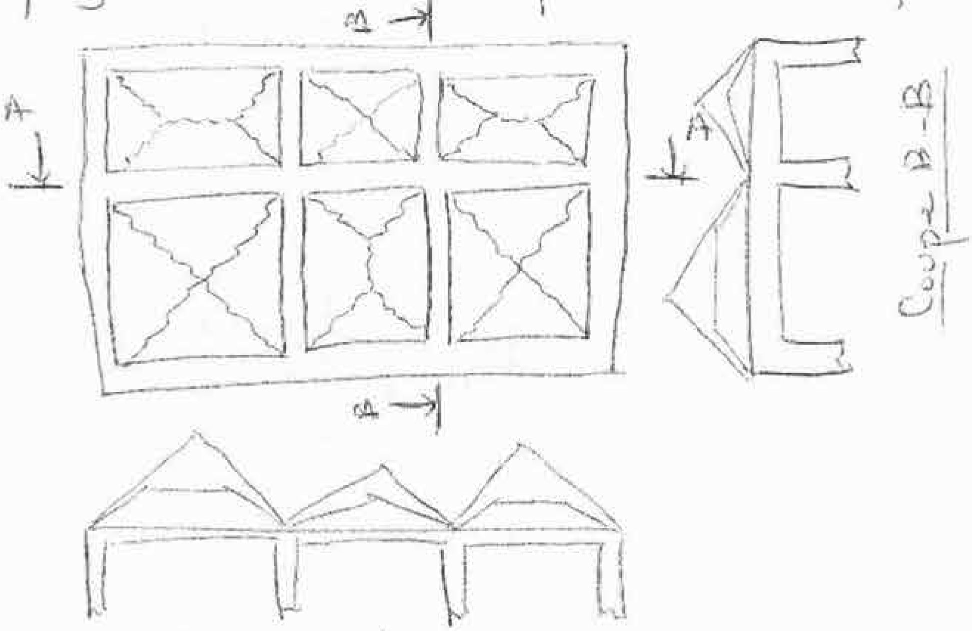


b/ Cas du plancher nervuré :

Pour les planchers nervurés et dans le cas où $\rho = \frac{l_x}{l_y} < 0,4$ le même cas se présente que pour les planchers à corps creux (des poutres principales supportant les charges du planchers et des poutres secondaires ne supportant que leurs poids propres)

3.2/ Dalle travaillant suivant les deux Directions.

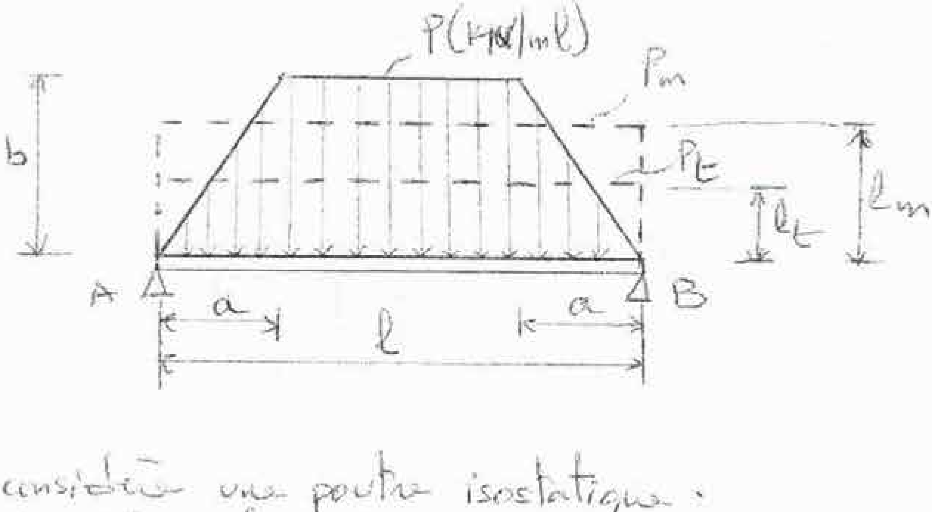
Ce cas ne peut se présenter que dans le cas des planchers nervurés. Pour chaque panneau de dalle la charge est transmise vers les quatre (04) poutres supportant le panneau, soit sous forme de charge triangulaire soit sous forme de charge trapézoïdale. Toutes les poutres sont des poutres porteuses.



Coupe A-A

3.3/ Conversion des charges triangulaires et trapézoïdales en charges réparties.

Pour faciliter les calculs de détermination des moments et efforts tranchants dans les poutres et pour pouvoir utiliser les différentes méthodes approchées, on convertira les charges triangulaires et trapézoïdales en charge répartie (uniformément répartie).
La méthode consiste à déterminer la largeur de la dalle correspondant à un diagramme rectangulaire qui donnerait le même moment (largeur l_m) et le même effort tranchant (largeur l_t) que le diagramme trapézoïdal. Le diagramme triangulaire est un cas particulier du diagramme trapézoïdal.



On considère une poutre isostatique.

a/ <u>Pour la détermination de l_m</u> : on égalise les expressions des moments dûs aux charges trapézoïdale et charge uniformément répartie de largeur l_m.
Soit q la charge surfacique sur la dalle en (KN/m²)
On aura donc :

$$\begin{cases} P = q \times b \\ P_m = q \times l_m \\ P_t = q \cdot l_t \end{cases}$$

charge trapézoïdale : $M_{max} = \frac{P}{24}\left(3\ell^2 - 4 \cdot a^2\right)$

$$M_{max} = \frac{q\,b}{24}\left(3\ell^2 - 4a^2\right)$$

charge uniformément répartie : $M_{max} = \frac{P_m\,\ell^2}{8} = q\,\frac{\ell_m\,\ell^2}{8}$

En égalisant les deux moments ; on aura :

$$\frac{q\,b}{24}\left(3\ell^2 - 4\,a^2\right) = q\,\ell_m\,\frac{\ell^2}{8} \Rightarrow \ell_m = \frac{b}{3\ell^2}\left(3\ell^2 - 4a^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_m = b\left(1 - \frac{4a^3}{3\ell^2}\right)} \Rightarrow \boxed{P_m = q.b\left[1 - \frac{4a^3}{3\ell^2}\right]}$$

b/ Pour la détermination de ℓ_t :

Charge trapézoïdale : $V_{max} = P\cdot\frac{(\ell - a)}{2} = q\,b\,\frac{(\ell - a)}{2}$

charge uniformément répartie : $V_{max} = P_t\,\frac{\ell}{2} = q\cdot\ell_t\,\frac{\ell}{2}$

En égalisant les deux Efforts tranchants ; on aura :

$$q\,b\,\frac{(\ell - a)}{2} = q\,\ell_t\,\frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell_t = \frac{b(\ell - a)}{\ell} = b\left(1 - \frac{a}{\ell}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_t = q\cdot b\left(1 - \frac{a}{\ell}\right)}$$

cas particulier : pour $a = \frac{\ell}{2}$ la charge devient triangulaire

4/ Détermination des Moments de Flexion :

Pour la détermination des moments de flexion, deux cas peuvent se présenter :

a/ Cas des charges modérées : si les charges sont modérées et en remplissant certaines conditions, les moments de flexion sont déterminés à l'aide d'une méthode approchée appelée :

" Méthode "Forfaitaire" pour les poutres"

b/ Cas des charges élevées : dans le cas de charges élevées et les conditions d'application de la méthode forfaitaire ne sont pas remplies, on déterminera les moments de flexion à l'aide d'une méthode approchée appelée :
"Méthode Caquot pour les poutres non solidaires aux poteaux".

4.1/ Méthode Forfaitaire :

4.1.1./ Conditions d'application :

Pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut vérifier les trois conditions suivantes :

a/ Conditions concernant la charge d'exploitation

* charges uniformément réparties :

$$\boxed{Q \leq Min\left[2 \times G \text{ et } 5\ KN/m^2\right]}$$

* charges concentrées :

$$\boxed{P \leq Min\left[\frac{Q}{4} \text{ et } 2\ KN\right]}$$

avec P = charge permanente concentrée (en KN)
Q = charge d'exploitation concentrée (en KN).

Si cette première condition est vérifiée, on peut dire que le plancher est à charge d'exploitation modérée.

b/ Conditions concernant les caractéristiques géométrique.

* Le moment d'inertie de la poutre doit être le même pour toutes les travées.
* Le rapport entre les portées successives des travées doit être compris entre 0,8 et 1,25

$$\boxed{0{,}8 \leq \frac{l_i}{l_{i+1}} \leq 1{,}25}$$

c/ Condition concernant le type de fissuration

La fissuration doit être considérée comme non préjudiciable (peu nuisible).

4.1.2/ Exposé de la Méthode

Le calcul pour la détermination des moments de flexion se fait pour chaque travée à part. Il s'agira de déterminer le moment positif en travée M_t et les deux moments négatifs aux appuis :

* M_t = moment en travée
* M_w = moment à l'appui de gauche
* M_e = moment à l'appui de droite

On désigne par $\boxed{\alpha = \frac{Q}{G+Q}}$

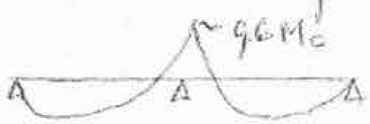
Il s'agira de vérifier les trois (03) conditions suivantes :

a/ $M_t + \dfrac{M_w + M_e}{2} \geqslant \text{Max}\left[1{,}05\,M_0 \text{ et } (1+0{,}3\alpha)\,M_0\right]$

b/ $M_t \geqslant \begin{cases} \left[\dfrac{1{,}2+0{,}3\alpha}{2}\right] \cdot M_0 & \text{pour les travées de rive} \\ \left[\dfrac{1+0{,}3\alpha}{2}\right] \cdot M_0 & \text{pour les travées intermédiaires} \end{cases}$

c/ <u>Les moment d'encastrement des appuis</u>.

* $M_a \geqslant 0{,}6\,M_0$ cas de poutre à 2 travées



* $M_a \geqslant 0{,}5\,M_0$ pour les appuis voisins des appuis de rive d'une poutre à plus de deux travées

* $M_a \geqslant 0{,}4\,M_0$ pour les autres appuis intermédiaires d'une poutre à plus de trois travées

<u>Remarques</u> :

1/ M_0 = Moment isostatique

2/ Dans les expressions ci-dessus les moment M_w et M_e sont pris en valeurs absolues

3/ Sur un appui considéré, on retient toujours la plus grandes des valeurs absolues des moments à gauche et à droite de cet appui.

4.2./ Méthode Caquot.

4.2.1./ Principe de la méthode:

Cette méthode est applicable dans le cas de charges d'exploitation élevées et surtout dans le cas où les conditions d'application de la méthode forfaitaire ne sont pas remplies.

Cette méthode est basée sur la théorie générale des poutres ~~continues~~ continues avec quelques modifications pour tenir compte de l'hétérogénéité du béton.

La méthode prendra en considération l'effet de charge sur les travées adjacentes et n'aura aucun effet sur les travées éloignées. Pour cela on déterminera les moments en travées et aux appuis en considérant les différents cas de travées chargées et travées déchargées et établir la courbe enveloppe donnant les différents moments maximum, positifs et négatifs.

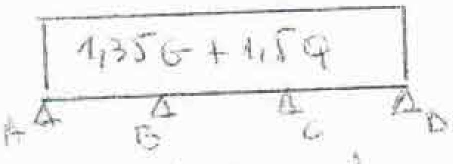
4.2.2./ Courbe Enveloppe:

La courbe enveloppe s'obtient en disposant les charges d'exploitation de la façon la plus défavorable.

La courbe enveloppe n'est établie que dans le cas de la combinaison de l'Etat Limite Ultime.

Pour illustrer la démarche à suivre, on étudiera l'exemple d'une poutre à trois (03) travées.

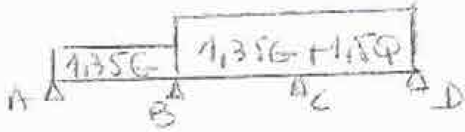
a/ Moment maximum à l'appui :



On obtient le moment max à l'appui en surchargeant les deux travées adjacentes à cet appui

M_B et M_C sont max.

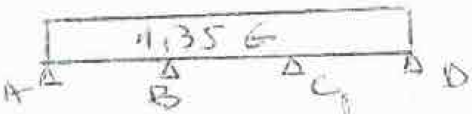
seul M_B est max



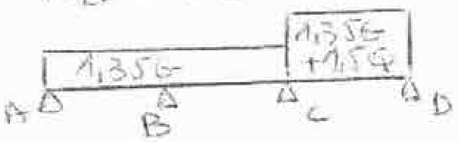
seul M_C est max

b/ Moment minimum à l'appui :

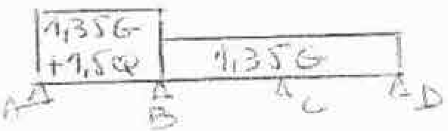
On obtient le moment min à l'appui en déchargeant les deux travées adjacentes à cet appui.



M_B et M_C sont min



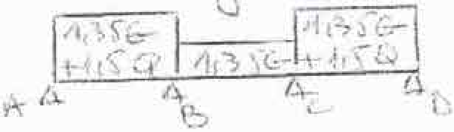
Seul M_B est min



Seul M_C est min

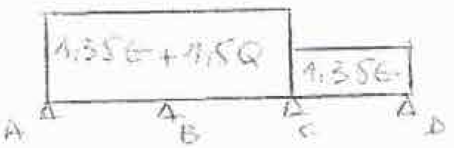
c/ Moment maximum en travée :

On obtient le moment max en une travée en la surchargeant et en déchargeant les travées adjacentes.



$M_{t_{AB}}$ et $M_{t_{CD}}$ sont max

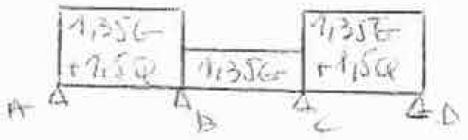
$M_{t_{BC}}$ est max.



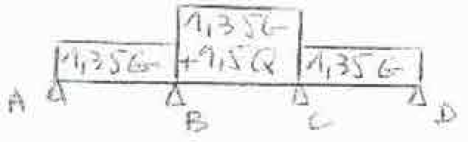
Aucun moment en travée n'est max.

d/ Moment minimum en travée :

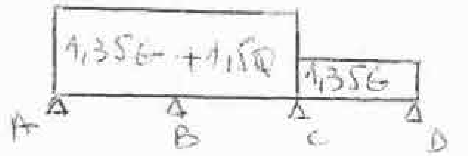
On obtient un moment minimum en travée en la déchargeant et en chargeant les deux travées adjacentes



$M_{t_{BC}}$ est min



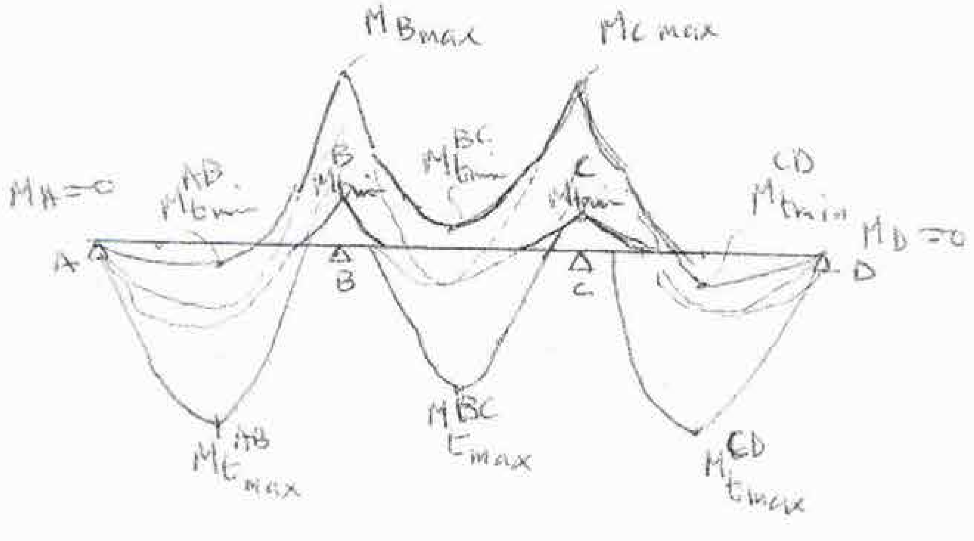
$M_{t_{AB}}$ et $M_{t_{CD}}$ sont min.



Seul $M_{t_{CD}}$ est min

Aucun moment en travée n'est min

Allure de la courbe enveloppe



4.2.3/ Exposé de la méthode.

a/ Portées fictives.

Dans les calculs on utilisera les longueurs fictives l' des portées à la place des longueurs réelles l.

$$l' = \begin{cases} l & \text{pour une travée de rive avec appui simple de rive,} \\ 0{,}8 \cdot l & \text{pour une travée intermédiaire.} \end{cases}$$

b/ Moments aux appuis :

Soit le coefficient de rigidité $\gamma = \frac{K_w}{K_e}$

avec K_w = raideur de la poutre à gauche de l'appui

$K_w = I_w / l'_w$

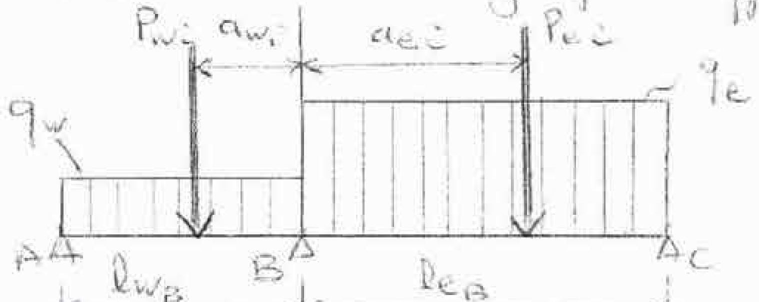
K_e = raideur de la poutre à droite de l'appui

$K_e = I_e / l'_e$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{I_w \, l'_e}{I_e \cdot l'_w}}$$

Pour une poutre continue à section constante $\gamma = \frac{l'_e}{l'_w}$

On déterminera le moment négatif à l'appui B



$$\boxed{M_B = \frac{q_w \cdot l'^2_w + \gamma q_e \, l'^2_e}{8{,}5(1+\gamma)} + \frac{l'_w \Sigma k_{wi} \cdot P_{wi} + \gamma \cdot l'_e \Sigma k_{ei} \cdot P_{ei}}{1+\gamma}}$$

avec : $k_{wi} = \dfrac{a_{wi}}{2{,}125\, l'_w}\left(1 - \dfrac{a_{wi}}{l'_w}\right)\left(2 - \dfrac{a_{wi}}{l'_w}\right)$

et $k_{ei} = \dfrac{a_{ei}}{2{,}125 \cdot l'_e}\left(1 - \dfrac{a_{ei}}{l'_e}\right)\left(2 - \dfrac{a_{ei}}{l'_e}\right)$

<u>Cas particulier</u> :

Pour une poutre à section constante et charge uniformément répartie sur toute la poutre :

P_{wi} et P_{ei} sont nulles et $I_w = I_e \Rightarrow \gamma = \dfrac{l'_e}{l'_w}$

$$\Rightarrow \boxed{M_B = \frac{q_w \, l'^3_w + q_e \, l'^3_e}{8{,}5(l'_w + l'_e)}}$$

c/ <u>Moment en travée</u>

Chaque travée est considérée comme une poutre simple encastrée aux appuis.

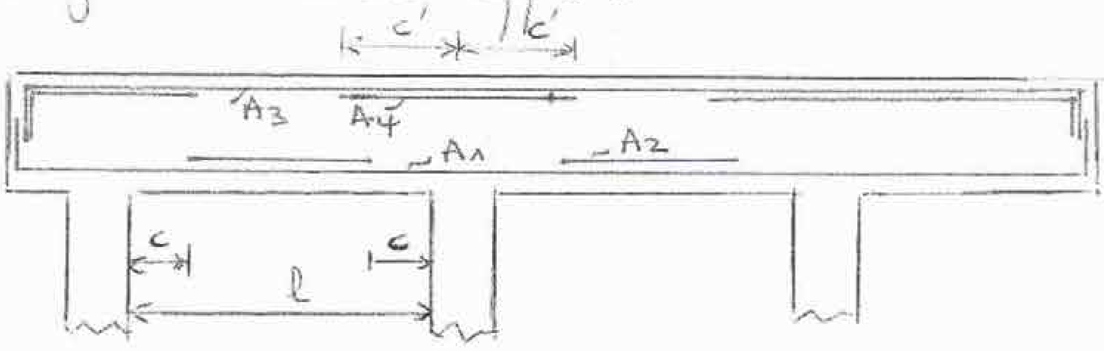
$$M(x) = M_0(x) - M_e - (M_w - M_e)\frac{(l-x)}{l}$$

On prendra le moment maximum en travée, le moment à mi-travée quelque soit le chargement donc à $x = l/2$, et avec la longueur l réelle.

Pour $x = l/2 \Rightarrow \boxed{M_t = M_0 - \dfrac{M_w + M_e}{2}}$

5/ Détermination et disposition du ferraillage

La section d'armatures longitudinales est déterminée pour chaque moment calculé. Toutefois lors du choix du nombre de barres et leurs diamètres, il faut faire la liaison entre les armatures inférieures et les armatures supérieures et pour chacune de ces armatures, faire la liaison entre les armatures en travée et à l'appui.
Pour cela, la disposition des barres doit se faire toujours en deux nappes.



La première nappe sera disposée sur toute la longueur de la poutre.
La deuxième nappe sera disposée en plus pour équilibrer, avec la première nappe, le moment maximum tout en respectant les conditions suivantes:

* Armatures inférieures :

$A_t = A_1 + A_2$ et $\boxed{A_1 \geq A_t/2}$ et $\boxed{c \leq \frac{1}{10} \cdot l}$

et aussi $\boxed{A_1 \geq 3\,cm^2}$

$\Rightarrow \boxed{A_1 \geq \mathrm{Max}\left[\frac{A_t}{2} \text{ et } 3\,cm^2\right]}$

* Armatures supérieures :

$A_a = A_3 + A_4$ et $A_3 \geq A_a/2$; $A_3 \geq 3\,cm^2$

donc $\boxed{A_3 \geq \mathrm{Max}\left[\frac{A_a}{2} \text{ et } 3\,cm^2\right]}$

et $c' = \begin{cases} l/4 & \text{si l'appui appartient à une travée de rive} \\ l/5 & \text{si l'appui appartient à une travée intermédiaire} \end{cases}$

6/ Vérification de l'E.L.S. de Déformation :
Le reglement CBA93 préconise la vérification de quelques inégalités pour se dispenser de la vérification des déformations par rapport aux déformations admissible.

6.1/ Pour les poutres :
Les trois inégalités sont :

$$\boxed{\frac{h}{l} \geq \frac{1}{16}} \; ; \; \boxed{\frac{h}{l} \geq \frac{M_t}{10 \cdot M_0}} \text{ et } \boxed{\frac{A}{b.d} \leq \frac{4,2}{f_e(MPa)}}$$

6.2/ Pour les poutrelles :
Il y a deux inégalités à vérifier :

$$\boxed{\frac{h}{l} \geq \frac{M_t}{15 \cdot M_0}} \text{ et } \boxed{\frac{A}{b.d} \leq \frac{3,6}{f_e(MPa)}}$$

Dans le cas où une ou toutes ces inégalités n'est pas vérifiées, il faut déterminer les deformations reelles du béton, selon l'Annexe D du reglement CBA93 pour tenir compte de l'hétérogénéité du béton et les comparer aux deformations admissible données par le CBA93

6.3/ Déformations admissibles :
* Pour les poutres (sur 2 appuis) : $\boxed{\bar{f} = \frac{l}{500}}$
* Pour les consoles : $\boxed{\bar{f} = \frac{l}{250}}$

7/ Sections défavorables dans une poutre

Pour localiser les sections défavorables dans une poutre il faut faire la différence entre une poutre porteuse et une poutre non porteuse.

7.1/ Poutre Porteuse :

Elle comporte trois (03) sections défavorables car elle supporte en même temps les charges verticals (G et Q provenant du plancher et les charges horizontals (charges sismiques). Les trois sections défavorable sont :

a/ A l'appui avec un moment négatif maximum :

Ce moment négatif à l'appui peut être obtenu à partir des combinaisons :

* $1{,}35\,G + 1{,}5\,Q$
* $G + Q + E$
* $0{,}8.G + E$

Dans ce cas il faut prévoir des armatures supérieures à l'appui.

b/ A l'appui avec un moment positif maximum :

Ce moment positif à l'appui peut être obtenu à partir des combinaisons :

* $G + Q + E$
* $0{,}8.G + E$

Dans ce cas il faut prévoir des armatures inférieures à l'appui c/ <u>En travée avec un moment positif maximum</u> :

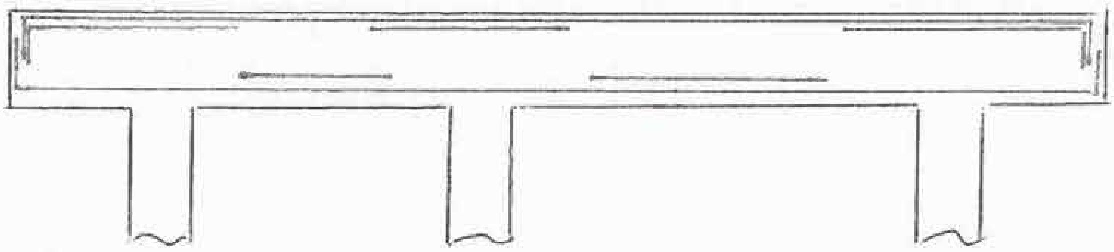
Ce moment en travée peut être obtenu généralement avec uniquement la combinaison $1,35G+1,5Q$ car le moment dû au séisme est nul à mi-travée.

Dans ce cas il faut prévoir des armatures inférieures en travée

<u>Remarque</u> :

Dans certains cas, on trouve un moment négatif en travée si cette dernière est courte et les travées adjacentes sont longues sous l'effet de charges d'exploitation importantes.

La disposition du ferraillage la plus fréquente pour les poutres porteuses est :



7.2/ <u>Poutre non porteuse</u> :

Vu que la poutre non porteuse ne supporte pas les charges verticales provenant du plancher la combinaison $1,35G+1,5Q$ n'aura pas un grand effet, les combinaisons dominantes seront celles dues au séisme ;

* $G+Q+E$
* $0,8G+E$

La poutre non porteuse comporte deux (02) sections défavorables

a/ A l'appui avec un moment positif.

b/ A l'appui avec un moment négatif.

La disposition du ferraillage la plus fréquente pour les poutres non porteuses est :