

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique

4<sup>ème</sup> Année Génie Civil

MMC

By LoTfi LOIAnD 2011-2012

2009/2010

# Programme :

## Chap 1 Généralités sur la MMC

- 1-1 Déf de la continuité.
  - 1-2 Description du mat.
    - 1-2-1 Lagrangienne
    - 1-2-2 Eulerienne
  - 1-3 Milieu déformable.
  - 1-4 Modèle élastique
  - 1-5 Modèle visqueux
- Hypothèses de simplification.

## Chap 2

### Tenseur de contraintes

- 2-1 Déf
  - 2-1-1 Eqs fondamentales ( $d' \leq$ )
  - 2-1-2 Vecteur colé en spt.
  - 2-1-3 Équilibre du cube et du tétraèdre élémentaires.
- 2-2 Étude de  $\bar{C}$  Analytiquement.
  - 2-2-1 Invariants de  $\bar{C}$
  - 2-2-2 États particuliers de Ctte
- 2-3 Étude de  $\bar{C}$  géométriquement.
  - 2-3-1 Ellipsoïde de LAMÉ
  - 2-3-2 Tri. Cercle de Mohr.
- 2-4 Applications.

## Chap 3 Etudes de déformation Tenseur de déformation

3-1 Grandes déf

3-2 Petites déf

3-2-1 hypothèses des petites perturbations.

3-2-2 Déf au voisinage d'un pt.

3-2-3 Etude de cette déf.

3-3 Exemple de déf homogènes.

## Chap 4 Dualité (C) déf (E)

la loi Elastique 3D

4-1 Généralités : lois de comportement.

4-2 Schéma élastique, continu, homogène, isotrope, isotherme.

4-3 Critères de  $\frac{P}{E}$

4-4 Analogie comportement fluide opt et  
Relations de Navier pr  
les fluides visqueux.

## Chap 5: Rheologie : Notions de Lakes.

5-1 Définition.

5-2 Modèles rhéologiques de Lake.

5-3 Modèles rhéologiques :  
Eq + diff rhéologique

$(\epsilon, \dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}, \dots) \rightarrow (\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots)$

5-4 Essais sur milieu solide et fluide  
caractéristiques rhéologiques.

## Chap 6 : Eqs Générales d'élasticité.

6-1 Déf les Eqs diff d'ordre indéfini

6-2 Pb généraux d'élasticité.

6-3 Etude en coords rectangulaires.

Cas particulier : Etat plan.

Solution, fct de  $\sigma$  : fct d'AIRY.

6-4 Etude en coords sphériques.

Chap 7 : Energie potentielle de déformation.

Chap 8 : Plaques (minces en flexion).



Date: 28/10/2009

## Rapports mathématiques

n/ Déf d'un Tenseur: Le concept de solide indéformable permet de déf la notion de pts de droite, de distance et d'angle à partir desquels on déf la géométrie classique d'EUCLIDE. En effet, en repère  $m, pt$ , en le rapportant à un solide de réf, il suffit de 3 nbr pr déf la position d'un pt, l'ensemble de ses pts constitue un espace euclidien à 3 dimensions.

1.1 Tenseur d'ordre 0: Scalaire, déf par une seule composante  $\phi, T, \dots$ , sans indice.

1.2 Tenseur d'ordre 1: Vecteur, déf par 3 composantes  $\{V_1, V_2, V_3\}$

$$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3) = V_i, i = \overline{1,3}$$

1 indice  $\rightarrow$  3<sup>1</sup> composantes.

1.3 Tenseur d'ordre 2: Matrice

$$\bar{A} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = \overline{1,3} \\ j = \overline{1,3} \end{matrix}$$

2 indices  $\rightarrow$  9<sup>2</sup> composantes.

## 1.4 Tenseur d'ordre n :

n indices,  $3^n$  composantes

## 2/ Éléments d'analyse matricielle :

### 2.1 Déf d'une matrice :

tableau de  $m \times n$  éléments

lignes  $\rightarrow$  colonnes

$$\bar{A}(m, n) = a_{ij} \quad \begin{array}{l} i : \text{ordre de la ligne} \\ j : \text{ " de la colonne} \end{array}$$

Cas particuliers : matrice carrée  $m=n$

$\mathbb{E}_3$ ,  $m=n=3$ .

### 2.2 Opérations matricielles :

\* Trace de  $\bar{A}$  :  $= \sum a_{ii}$

\* Transposée de  $\bar{A}$  :

$$\bar{A}^t = b_{ji} \text{ tel que } b_{ji} = a_{ij}$$

\* Matrice symétrique :

$$\text{Tel que } \bar{A}^t = \bar{A} \rightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

\* Matrice antisymétrique :

$$\boxed{\bar{A} + \bar{A}^t = 2I \cdot a_{ii}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & -6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} = 2I a_{ii}$$

\* Somme de 2 mat:

$$\bar{A}(m,n) + \bar{B}(m,n) = \bar{C}(m,n)$$

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

\* Egt matricielle:

Ces syst de  $m$  Egt linéaires entre  $m$  inconnues  $x_i$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}$$

$$\bar{A}(m,n) \bar{X}' = \bar{B}'$$

Si le nbr d'Éts  $m =$  nbr d'inconnues  $n$

supposant q'he la matrice inverse de  $\bar{A}$  existe

$$\bar{X}' = \bar{A}^{-1} \bar{B}' \quad \text{il résulte que le syst}$$

de  $m$  Egt admet une sol unique.

Syst de CRAMER.

## 2.3 Etude d'un tenseur d'ordre 2:

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = C_{ij}$$

\* Décomposition:

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{C}}_{\text{sphérique}} + \bar{\bar{C}}_{\text{déviateur}}$$

$$\bar{\bar{C}}_s = \frac{\text{trace } \bar{\bar{C}}}{3} \cdot \mathbf{I} = \begin{bmatrix} C_m & 0 & 0 \\ 0 & C_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{bmatrix}$$

$$\text{trace de } \bar{\bar{C}}_s = \text{trace } \bar{\bar{C}}$$

$$C_{\text{moy}} = \frac{C_{11} + C_{22} + C_{33}}{3}$$

$$\bar{\bar{C}}_d = C'_{ij} \quad \text{tel que} \quad \bar{\bar{C}}_d = \bar{\bar{C}} - \bar{\bar{C}}_s$$

$$\text{trace } \bar{\bar{C}}_d = 0$$

\* Invariants principaux:

le repère pr lequel le tenseur à une représentation par une mat diagonale

$$\bar{\bar{C}} = C_{ij} \xrightarrow{\text{X}_i} \bar{\bar{B}} = b_{ii} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

valeurs principales (propres)

$$\det \bar{\bar{C}} - d \mathbf{I} = 0$$

$$\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix} \quad \text{ordre} \rightarrow d_1 > d_2 > d_3$$

$$\det \bar{\bar{C}} - \lambda I = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

$I_i$ : Invariants

1<sup>er</sup> Invariant:  $I_1 = \text{trace } \bar{\bar{C}}_{x_i} = \text{trace } \bar{\bar{C}}_{x_i}$

2<sup>eme</sup> Invariant:  $I_2 = \frac{1}{2} [C_{ii} G_{jj} - G_{ij} G_{ji}] \quad i \neq j$

3<sup>eme</sup> Invariant:  $I_3 = \det \bar{\bar{C}}_{x_i} = \det \bar{\bar{C}}_{x_i} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

\* Directions principales:

repère principal

$$d_i \longrightarrow \vec{X}_i = (\alpha_j)$$

$$(\bar{\bar{C}} - d_i I) \vec{X}_i = \vec{0}$$

$$[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1]$$

$$\vec{X}_3 = \vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2$$

2.4 Notation indicielle:

\* Symbole de CRONECKER:

$$I = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

\* Symbole alternant:

$$E_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{rotation directe des indices} \\ -1 & \text{rotation indirecte} \\ 0 & \text{si un des indices se répète} \end{cases}$$



## \* Convention d'ENSTEIN :

Quand 1 indice intervient 2 fois ds un terme monome, la sommation sur cet indice est à lettre figurant 2 fois en indice et en même signifi firs sauf ind contraire qu'de somme est à effectuer. on lui donne ds ce cas le nom d'indice mué par l'opération à l'indice libre.

exp: trace  $\bar{A} = \sum_i a_{ii} = a_{ii}$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \sum_i U_i V_i = U_i V_i$$

$$U_{i,i} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \text{div } \vec{U}$$

$$P_i = T_{ij} q_j$$

$\uparrow$  libre       $\downarrow$  mué

$$i=1 \rightarrow P_1 = T_{11} q_1 + T_{12} q_2 + T_{13} q_3$$

## Règle de LEIBNITZ:

Soit  $f(x_i, t)$  fct def et continue à l'intérieur d'un domaine matériel def par un volume  $V$ , contour  $A$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(x_i, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x_i, t) dV + \int_{A(t)} f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

variation locale      variation due au transport



## Règle de Gauss :

Transformation de  $\iint_S \rightarrow \iiint_V$

1/  $\vec{V}$  tenseur d'ordre 1 :

$$\int_A \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_V \text{div } \vec{V} dV$$

$\downarrow$   
 $V_{i,i}$  — scalaire

2/  $\bar{\pi}$  tenseur

$$\int_A \bar{\pi} \cdot \vec{n} dA = \int_V \text{div } \bar{\pi} dV$$

$$\text{div } \bar{\pi} = \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j} = \pi'_{ij,j}$$

$$\begin{aligned} i=1 & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \pi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \pi_{13}}{\partial x_3} \\ & \frac{\partial \pi_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \pi_{23}}{\partial x_3} \\ & \frac{\partial \pi_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \pi_{33}}{\partial x_3} \end{aligned} \right. \\ i=2 & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \pi_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \pi_{23}}{\partial x_3} \\ & \frac{\partial \pi_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \pi_{33}}{\partial x_3} \end{aligned} \right. \\ i=3 & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \pi_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \pi_{33}}{\partial x_3} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

## 1/ Hypothèse de continuité d/s milieu:

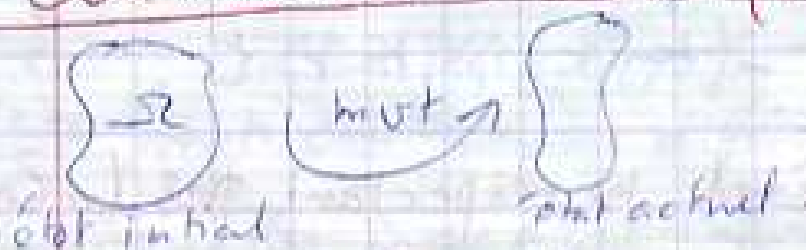
Def La théorie des milieux continus s'intéresse à des phénomènes dont les échelles caractéristiques sont + grands que les échelles moléculaires au pt. qu'on puisse la structure discontinue de la matière contrairement au modèle moléculaire, le modèle du continu est fondé sur l'hypothèse de distribution continue et des grandeurs physiques.

C'est constitutif est la particule, on peut tenter d'en préciser la signification en affirmant qu'il s'agit, occupant à un instant donné un volume suffisamment grand pr contenir un très grand nbre de molécules, et suffisamment petit pr avoir le caractère ponctuel microscopique.

Ds l'étude des corps déformables, on cesse de considérer la matière comme ensemble de particules distinctes ayant chacune une masse invariable, le schéma de particules solides est remplacé par le schéma suivant

On considère que ds le voisinage d'un pt géométrique  $M(x_i)$ , il existe à l'instant  $t$  une distribution de matière de masse volumique  $\rho(x_i, t) = \frac{dm}{dV}$ , continue continuellement différentiable. Par conséquent, toutes les propriétés de la mat. seront aussi continues et différentiables.

## 1.2 Continuité des transformations:



Ds ces mut, le milieu continue passe par plusieurs états ou config, notant qu'une déformation est une transformation géométrique.

On suppose que 2 pts matériels infiniment voisins à l'état initial, par conséquent l'hypothèse de continuité  $\Rightarrow$ :

1. Des pts matériels qui, à l'instant  $t$ , forment un ensemble continu, courbe ou surface, forment encore à tout instant néo-proche un ensemble fermé.

2 - la masse contenue à l'intérieur d'une surface matérielle fermée reste constante au cours du temps.

On entend par surface mat, une surface qui se déplace et se déforme / au repère du mot.  
Ce terme s'oppose à surface géométrique qui désigne qu'une surface invariable.

3 - Les elt mat qui, à l'instant donné, forment <sup>au repère du mot</sup> une frontière d'un milieu continu, forment encore la frontière à tout instant  $t$ .

1-3 Phénomènes ne respectant pas la continuité

L'hyp. de cont doit être absolue, elle n'est pas vérifiée dans les cas suivants :

① → formation de trous : - Cavitation → milieu fluide  
- fissure → solide

② → Glissement de terrain relatif de 2 parties du milieu

- Sillage → fluide

- glissement → solide



③ → Choc de 2 veines fluides :



2/ Description du mot d'1 million continue:

Pour étudier le mat d'un milieu déformable on peut utiliser 2 Syst de variables indépend

- Descrip Lagrangiennes.
- En coordonnées.

- $\frac{0}{1}$  Evoluções.

## 2.1 Descriptions Lagrangiennes: Coordonnées

un état initial remarquable, il est comode de définir le mot en considérant qu'à chaque instant  $t$  les coord. d'un pt sont  $x_i$  fonc. of  $x_i^0$  et  $t$ .  $x_i = x_i(x_i^0, t)$  - trajectoires. Ces fct's sont continuellement différentiables,

$\Delta x_i^0$ : variables indep. de Lagrange.

champ de vecteur vitesse

acceleration

$$\vec{V}(x, t) = \vec{V}(x_i^0, t) = V_i(x_i^0, t) = \frac{\partial x_i(x_i^0, t)}{\partial t}$$

$$\vec{\delta} = \delta_i(x_j^0, t) = \frac{\partial d_i(x_i^0, t)}{\partial t^2}$$

Lagrang rattache ces + les grandeurs à dét  
 $(\phi, v, T, \dots)$  aux p<sup>ts</sup> matériels.



## 2-2 Description Eulérienne :

Ds le cas général, d'le part on ne connaît pas d'état initial remarquable et d'autre part les  $F$  qui s'exerce sur le milieu apparaît comme des  $f_{ext}$  des coordo actuelles  $X_i$  à l'instant  $t$ , on est donc amené à considérer la masse volumique et toutes les autres prop physiques du milieu comme des  $f_{ext}(X_i, t)$ .

L'état cinématique du milieu est définie par le champ de vitesse et non plus par les trajectoires, l'ensemble des  $f_{ext} = f, V_i$  définit l'état cinématique du milieu, on a rapporté le tout aux variables d'Euler.

⚡ Euler rattache les + les grandeurs à déterminer géométrique.

Conclusion: En MDF on emploi presque tjrs les variables d'Euler, parce que la pos initiale n'a généralement aucune importance par contre ds le cas de solide élastique les pos initiales jouent 1 rôle éminent et l'emploi de variables de Lagrange s'impose.



## 2.3 Notions fondamentales de Mé générale:

+ la cinématique: elle fournit le cadre spatio-temporel ds lequel peuvent être décrit les mot.

+ Déf d'un mot: Supposant qu'un pt  $M$  d'un syst  $S$  est en mot / à un repère  $R$ .  
Soit  $S_0$  la position de  $S$  à l'instant  $t_0$ .  
Il existe entre les pts  $M_t$  de  $S_t$  et  $M_0$  de  $S_0$  une correspondance, en effet à chaque pt  $M_t$  ( $S_t$ ) correspond  $M_0$  ( $S_0$ ) et réciproquement.  
Par déf on dit qu'on suit  $S$  ds son mot si à chaque instant  $M$  est homologue à  $M_0$ .

+ la cinétique: la cinématique se construit à partir de la géométrie en introduisant une notion nouvelle (le temps), la cinétique se construit à partir de la cinématique en introduisant la notion nouvelle (la masse).

## 3. Loi de conservation de masse :

3.1 La masse : La masse est attribuée à ~~partir~~ de la masse volumique qui est  $f =$  continue ; déf à chaque instant  $t$  et en chaque pt  $M(x_i)$  d'un syst  $S$  considéré.  
Par déf, la masse contenue ds  $D$  donnée est donnée à l'instant  $t$  :

$$m(D) = \int_V f(x_i, t) dV.$$

Chap.

Date: 06/12/200

## Tenseur de contraintes

### I - Rappels:

Considérons un volume  $V$  d'un solide  $S$  soumis à un syst de forces volumiques  $f_v$  et un syst de forces superficielles  $f_s$ .

$$[f_v] = [F] [L]^{-3} \quad \text{forces ext}$$

$$[f_s] = [F] [L]^{-2} \quad \text{forces dues}$$

Syst en  $\Leftrightarrow$ :

$\rightarrow \Leftrightarrow$  général: sur l'ensemble des  $\vec{F}_{ext} \Rightarrow$   
Tenseur résultant de l'ensemble de ces  $\vec{F}_{ext}$  est nul.

$$\int_V \vec{f}_v dv + \int_S \vec{f}_s dS = \vec{0} \quad (\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0})$$

$$\int_V \vec{G} \wedge \vec{f}_v dv + \int_S \vec{G} \wedge \vec{f}_s dS = \vec{0} \quad (\sum \vec{M}_{P_0} = \vec{0})$$

$\rightarrow \Leftrightarrow$  partiel:

$$\begin{aligned} D_1 (V_1, S_1) & \quad V_1 + V_2 = V \\ D_2 (V_2, S_2) & \quad S_1 + S_2 = S \end{aligned}$$



$\gamma \leq$  est assuré

Sous l'effet des  $\vec{F}_{ext}$  propres à la partie considérée et l'action de la partie complémentaire

$\leq$  de  $D_1$  :  $\int_{V_1} \vec{f}_v dV + \int_{S_1} \vec{f}_s dS + \text{Action } D_2/D_1 = \vec{0}$

$\leq$  de  $D_2$  :  $\int_{V_2} \vec{f}_v dV + \int_{S_2} \vec{f}_s dS + \text{Action } D_1/D_2 = \vec{0}$

$\leq$  local :  $\text{même}$

$$\underbrace{\int_{\underbrace{V_1+V_2}_V} \vec{f}_v dV + \int_{\underbrace{S_1+S_2}_S} \vec{f}_s dS}_{\vec{0}} + \text{Action } D_1/D_2 + \text{Action } D_2/D_1 = \vec{0}$$

d'où  $\text{Action } D_2/D_2 + \text{Action } D_1/D_2 = \vec{0}$   
Principe de l'action et de la réaction.

## II - Déf du Tenseur de $\sigma$ :

2-1 Vecteur  $ut$  : il caractérise les effets de  $\sigma$  exercées un élément de surface sur une partie  $D$  du milieu continu, il est défini par :

$$\vec{f}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS}$$



$$\vec{f} = \begin{Bmatrix} m \\ R \end{Bmatrix}$$

La  $\tilde{\sigma}$  est donc la part de l'effort qui revient à la section obtenue par le plan de coupe  $(\pi)$  à l'élément de surface  $ds$  tracé autour d'un pt  $M$  et défini par la normale  $\vec{n}$ .

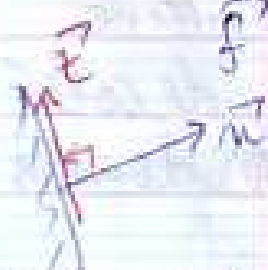
Par convention, on choisit pour normale  $\vec{n}$  la normale ext au domaine  $D$ , cette convention est universelle en MDM déformables à l'exception près (MDS) où on utilise la convention inverse.

Par convention également on prend en MDS le zéro des  $\tilde{\sigma}$  pour la Pa, la Tenseur de peut être décomposé en :

$$\vec{f}(M, \vec{n}) \begin{cases} \nearrow \text{composante normale } \tilde{\sigma}_n \\ \searrow \text{composante tangentielle } \tilde{\sigma}_t \end{cases}$$

$\tilde{\sigma}_n$  : projection de  $\vec{f}$  sur  $\vec{n}$   $\tilde{\sigma}_n = \vec{f} \cdot \vec{n}$

$$\vec{f} = f_i \vec{e}_i, \quad \vec{n} = (n_i)$$



$$\tilde{\sigma}_n = f_i n_i$$

3D :  $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ ,  $\vec{n} \rightarrow E$  direct

$$f^2 = \tilde{\sigma}_n^2 + \tilde{\sigma}_t^2 \Rightarrow \|\tilde{\sigma}_t\| = \sqrt{f^2 - \tilde{\sigma}_n^2}$$



2D :  $\vec{n} = n_i$

$\alpha = \text{angle orienté}(\vec{f}, \vec{n})$

$\vec{n}(\cos \alpha, \sin \alpha)$

$\vec{f} + \vec{n} \quad \vec{f}(-\sin \alpha, \cos \alpha)$

$\tilde{\sigma}_t = \vec{f} \cdot \vec{f}$  (val scalaire)

## 2.2 Tenseur de $\tilde{\sigma}$

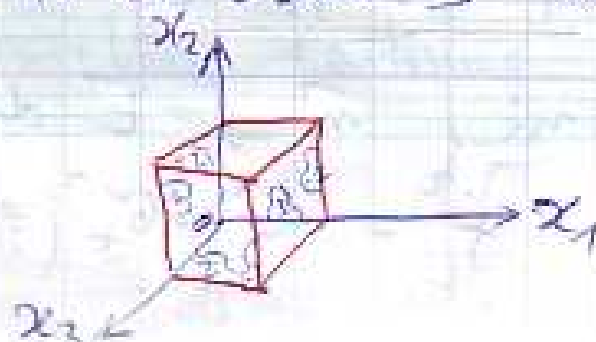
Le vect de  $\tilde{\sigma}$  est associé à un élément de surface de normale ext  $\vec{n}$ , on parle généralement d'une facette, pour connaître l'état de  $\tilde{\sigma}$  en 1 pt donné il faut connaître les vects de  $\tilde{\sigma}$  associés à toutes les facettes C-à-d à tout vecteur unitaire.

On commence par traduire  $\vec{e} \leq$

2-2-1  $\leq$  d'un cube élémentaire :

Réciprocité de cisaillement :

Considérant,  $\vec{e} \leq$  d'un cube élémentaire rapporté à 3 axes rectangulaires, de côtés infiniment petits et dans 3 coordonnées.





Face  $i$  antiparallèle à  $O$  et de normale  $\vec{x}_i$   
 $-i$  //  $i$

Ce  $\text{blo}^r$  est  $\frac{1}{2}$  sous l'action des  $\vec{F}$   
 prop au vect de  $\vec{O}$  sur chaque une des face

Sur la face  $i$  :  $\vec{f}_i(M, \vec{x}_i) = (f_{ij})$

Sur la face  $-i$  :  $-\vec{f}_i(M, \vec{x}_i)$

Forces superficielles :

face 1:  $f_{11} a^2 \quad f_{12} a^2 \quad f_{13} a^2$

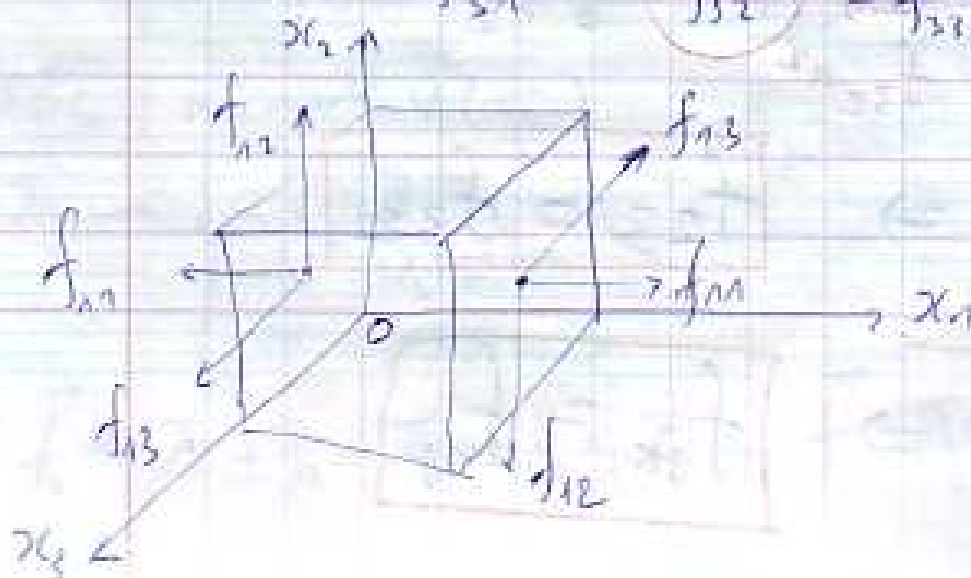
-1  $-f_{11} a^2 \quad -f_{12} a^2 \quad -f_{13} a^2$

2  $f_{21} a^2 \quad f_{22} a^2 \quad f_{23} a^2$

-2  $-f_{21} a^2 \quad -f_{22} a^2 \quad -f_{23} a^2$

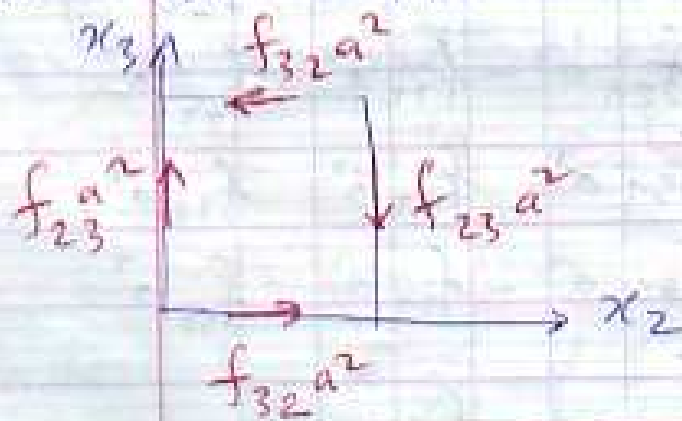
3  $f_{31} a^2 \quad f_{32} a^2 \quad f_{33} a^2$

-3  $-f_{31} a^2 \quad -f_{32} a^2 \quad -f_{33} a^2$



$$\sum M_i / O x_1 = \sum M_1 \quad 2 \wedge 3$$

- toutes les forces de direction  $\vec{x}_j (j=1)$  n'interviennent pas dans la composante du moment  $M_1$ ,  $f_{i1} a^2$
- Les Forces normales  $f_{22} a^2, f_{33} a^2$  sont 2 à 2 égales en module et opposées en direction  $\Rightarrow M=0$
- Ces Forces tangentes sur 1 et -1  $f_{12} a^2, -f_{12} a^2, f_{13} a^2, -f_{13} a^2$  sont 2 à 2 anti-équipolaires à l'axe  $x_1$  exercées à une même distance de l'axe.  $\Rightarrow M=0$



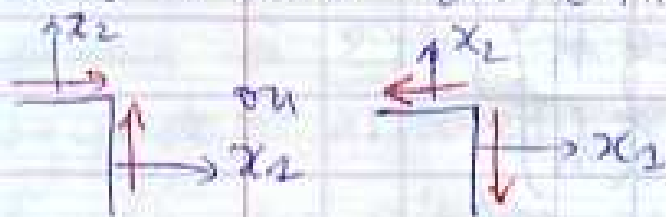
$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow \boxed{f_{23} = f_{32}}$$

Généralisation:

$$\sum M_i = 0 \Rightarrow \boxed{f_{jk} = f_{kj}} \quad i=1,2,3$$

## Thm de réciprocité

Si l'on considère le plan de coupe rectangulaire en 1 pt, les composantes tangentes des  $\sigma$  ds ces 2 plans de coupe selon les normales à l'arête sont égales et toutes 2 dirigées vers l'arête ou l'inverse.



Date: 07/12/2009

## 2.3 du tétraèdre élémentaire :

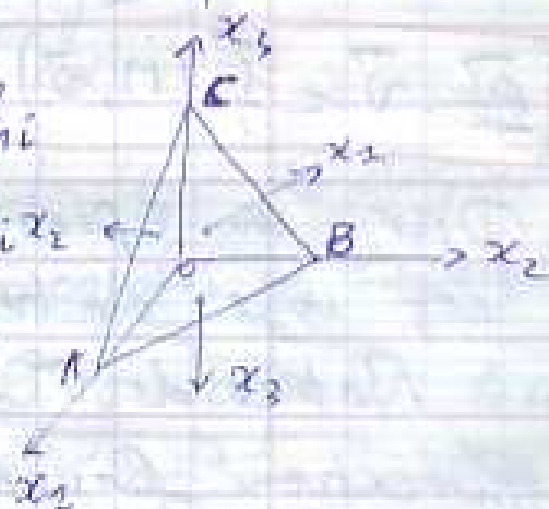
Le pb est de déter le vect  $\sigma$  ds la direction qd à partir du vect  $\sigma$  selon les plans de coord.

$$OBC \xrightarrow{\text{normale}} \vec{x}_1 (1, 0, 0) \rightarrow f_i(n, \vec{x}_1) = f_{1i}$$

$$OAB \xrightarrow{\text{normale}} \vec{x}_3 (0, 0, 1) \rightarrow f_i(n, \vec{x}_3) = f_{3i}$$

$$OAC \xrightarrow{\text{normale}} \vec{x}_2 (0, 1, 0) \rightarrow f_i(n, \vec{x}_2) = f_{2i}$$

$$ABC \text{ normale } \vec{V}(\alpha_i)$$



$$ABC = \Sigma \rightarrow \begin{cases} OBC = \alpha_1 \Sigma \\ OAC = \alpha_2 \Sigma \\ OAB = \alpha_3 \Sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{f}_1 \alpha_1 \Sigma + \vec{f}_2 \alpha_2 \Sigma + \vec{f}_3 \alpha_3 \Sigma = \vec{f} \cdot \Sigma$$

projection:

$$\vec{x}_1 \rightarrow f_{11}\alpha_1 + f_{21}\alpha_2 + f_{31}\alpha_3 = f_1$$

$$\vec{x}_2 \rightarrow f_{12}\alpha_1 + f_{22}\alpha_2 + f_{32}\alpha_3 = f_2$$

$$\vec{x}_3 \rightarrow f_{13}\alpha_1 + f_{23}\alpha_2 + f_{33}\alpha_3 = f_3$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$f_{ij} = f_{ji} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ & f_{22} & f_{32} \\ \text{sym} & & f_{33} \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{f}(M, \vec{v})$$

$$\boxed{\vec{C} \cdot \vec{v} = \vec{f}(M, \vec{v})} \quad \text{On passe de } \vec{v} \text{ au } \vec{f}$$

par un opérateur linéaire dont l'image est une matrice carrée sym. appelée

Matrice de  $\sigma$ . Le tenseur de  $\sigma$  est une application linéaire de l'espace vect à 3 dim  $E_3$  de lin  $\vec{m}$ , les composantes diag sont

les  $\sigma$  normales, les non-diag sont  $\sigma$  tangentielle.

Is cet opérateur linéaire à 3 dim, à matrice symétrique, il existe 3 directions propres ou invariants qui sont réelles et tri-rectangulaires, selon lesquels le vect  $\vec{\sigma}$  a 3 directions que vect normal → directions principales.

2-4 Théorème de Cauchy: Étant donné 2 vects normaux à 2 plan de coupe en 1 pt, ainsi que les vect de  $\vec{\sigma}$  associés, il existe entre  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_1'$  une relation tel que : projection de  $\vec{\sigma}_1$  sur  $\vec{\sigma}_1'$  égale projection de  $\vec{\sigma}_1'$  sur  $\vec{\sigma}_1$ .

$$\boxed{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_1' = \vec{\sigma}_1' \cdot \vec{\sigma}_1} \quad \text{on pose} \quad \begin{cases} f_{ii} = \sigma_i \\ f_{ij} = t_{ij} \end{cases}$$

III - Étude du tenseur de  $\vec{\sigma}$ :  $\bar{\bar{C}}$

$\bar{\bar{C}}$  est symétrique, on peut donc le diagonaliser. Il existe, 3 directions principales orthogonales associées à 3 valeurs de  $\vec{\sigma}$  principales. Le conditionnement nécessaire et suffisant pour qu'une direction soit principale, est que la  $\vec{\sigma}$  exercée sur la facette correspondante soit normal.



$$\bar{C}/x_i = \tilde{C}_{ij} \rightarrow \bar{C}/\vec{x}_i = \tilde{C}_i$$

$$\tilde{C}_1 > \tilde{C}_2 > \tilde{C}_3$$

$$\det(\bar{C} - \lambda I) = 0$$

$$\rightarrow -\lambda^3 + \tilde{I}_1 \lambda^2 - \tilde{I}_2 \lambda + \tilde{I}_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$3 \lambda \rightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

$$\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 \quad \tilde{C}_3$$

$\tilde{I}_i$  : Invariants.

- $\tilde{I}_1 = \text{trace } \bar{C} = \tilde{C}_{ii} = n_i = \tilde{C}_i \cdot q/q$  le module
- $\tilde{I}_2 = \frac{1}{2} [\tilde{C}_{ii} \tilde{C}_{jj} - \tilde{C}_{ij} \tilde{C}_{ji}] = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + \tilde{C}_2 \tilde{C}_3 + \tilde{C}_1 \tilde{C}_3$
- $\tilde{I}_3 = \det \bar{C} = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \tilde{C}_3$

l'eqt en  $\lambda$  de 3<sup>em</sup> deg  $\rightarrow$  3 racines

Dét des directions principales  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$

$$\begin{cases} (\bar{C} - \tilde{C}_i I) \vec{x}_i = 0 \\ x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2 = 1 \end{cases}$$



Rem: on décompose le tenseur de  $\sigma$  en déviateur et sphérique.

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{C}}_{sp} + \bar{\bar{C}}_d$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $\frac{\text{trace } \bar{\bar{C}}}{3} \times I$   $\text{trace } \bar{\bar{C}}_d = 0$

$\bar{\bar{C}}$  et son  $\bar{\bar{C}}_d \rightarrow$  in direct princ

et les  $\sigma_{di}$  princip déviatorres sont  $\sigma_i$

$$\sigma_{di} = \frac{2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{3}$$

## 2.5 Etats particuliers de $\sigma$ :

2.5.1 Etat de tension ( $>0$ ) ou de comp ( $<0$ )  
hydrostatique:

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma > 0 \text{ tension} \\ \sigma < 0 \text{ cpr} \end{array}$$

les 3  $\sigma$  sont princip et égales, le déviateur = toutes direction  $\rightarrow$  principale.  
 c'est l'Etat de  $\sigma$  existant de les fluides au repos.

## 2.5.2 Etat de $\sigma$ de révolution :

$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$  Les directions princ sont  $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$  et toute direction  $\perp$  du plan  $\vec{x}_2 \vec{x}_3$  pour  $\sigma_2$ .

C'est l'état de  $\sigma$  qui se réalise  $\sigma_1, \sigma_2 < 0$  ds le sol en profondeur. comp.

## 2.5.3 Etat traction-compression uniaxiale :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

$\sigma > 0$   $\sigma < 0$

C'est l'état le + facile à réaliser expérimentalement.

## 2.5.4 Etat de Cisaillement pur :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / \vec{x}_1 \quad \text{Cisaillement ds le plan } (M, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix} / \vec{x}_1$$

$C_{\text{epi}} = 0$ , purement déviatoire, les direct. princ sont  $\vec{x}_3 = \vec{x}_2 = (0, 0, 1) \hookrightarrow \sigma_2 = 0$

Ces directions correspondant aux  $\sigma_i \pm \tau$  sont les bissectrices des axes  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ .

2-5-5 Etat plan de Geste:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & \tilde{\sigma}_{12} & 0 \\ \tilde{\sigma}_{12} & \tilde{\sigma}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\sigma}_{33} = 0$$

$\bar{x}_3$  direc privilégiée et principale

$\vec{n} = (n_i) = (n_1, n_2, 0)$ ,  $\vec{c}$  reste ds ce plan

Date: 13/12/2009

Exo1:

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} 0,7\alpha & 3,6\alpha & 0 \\ 3,6\alpha & 2,8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix} \text{ daN/mm}^2$$

$\alpha > 0$

1° Quel est l'état de  $\tilde{\sigma}$  en M pour  $\alpha = 0$

$$\alpha = 0 \rightarrow \bar{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix} \text{ daN/mm}^2$$

traction uniaxiale d'axe  $\bar{x}_3 (0, 0, 1)$   
de valeur  $7,6 \text{ daN/mm}^2$ .

20/ Déterminer en fonction de  $\alpha$  les  $\sigma_i$ , leurs directions  $\vec{X}_i$ , que peut-on conclure lorsque  $\alpha$  varie.

$$\det[\bar{\sigma} - \lambda I] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0,7\alpha - \lambda_1 & 3,6\alpha & 0 \\ 3,6\alpha & 2,8\alpha - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 - \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$= (7,6 - \lambda_3) \left[ (0,7\alpha - \lambda_1)(2,8\alpha - \lambda_2) - 12,46\alpha^2 \right]$$

$$\left[ 1,96\alpha^2 - 0,7\alpha\lambda_1 - 2,8\alpha\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 - 12,96\alpha^2 \right]$$

$$= (7,6 - \lambda) [-11\alpha^2 - 3,5\alpha\lambda + \lambda^2] = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_3 = 7,6 \text{ daN/mm}^2$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_1 = 5,5\alpha$$

$$\lambda_2 = -2\alpha$$

$$\vec{X}_3(0, 0, 1)$$

Case 1  $\alpha > \frac{7,6}{5,5}$   
 $S_1: 5,5\alpha > 7,6$

$$\bar{C}/\bar{X} = \begin{bmatrix} 5,5\alpha & 7,6 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{bmatrix} \quad \bar{X}_3 = \bar{X}_2$$

Case 2  $\alpha < \frac{7,6}{5,5}$   
 $S_1: 5,5\alpha < 7,6$

$$\bar{C}/\bar{X} = \begin{bmatrix} 7,6 & 5,5\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{bmatrix} \quad \bar{X}_3 = \bar{X}_1$$

Case 1:  
 $S_1 = 5,5\alpha \rightarrow \bar{X}_1(m_1, m_2, m_3)$

$$\begin{bmatrix} 0,7\alpha - 5,5\alpha & 3,6\alpha & 0 \\ 3,6\alpha & 2,8\alpha - 5,5\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 - 5,5\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$-4,8m_1\alpha + m_2 3,6\alpha = 0$$

$$3,6\alpha m_2 - 2,7\alpha m_2 = 0 \rightarrow \boxed{m_2 = 0,75 m_1}$$

$$(7,6 - 5,5\alpha)m_3 = 0 \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow \boxed{m_3 = 0}$$

$$m_1^2 + m_2^2 = 1 \rightarrow 1,56 m_1^2 = 1$$

$$\boxed{m_2 = 0,8} \rightarrow \boxed{m_1 = 0,6}$$

$$\bar{X}_1 = (0,6; 0,8; 0)$$

$$\bar{X}_2 = (0; 0; 1) = \bar{X}_3$$

$$\bar{X}_3 = \bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 = (0,8; -0,6; 0)$$



Cas 2 :  $\vec{x}_1 = \vec{x}_3 = (0; 0; 1)$

$$\vec{x}_2 = (0,6; 0,8; 0)$$

$$\vec{x}_3 = \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 = (-0,8; 0,6; 0)$$

Ces ~~valeurs~~ directions principales sont indog de  $\alpha$ .

30/  $\alpha = 1$  : Représenter l'Etat de  $\sigma$  sur les facettes de  $\pi$  ( $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ) et calculer la  $\sigma$  appliquée en M sur la facette dont la normale a pour cos directeur à la base  $\vec{e}_i$

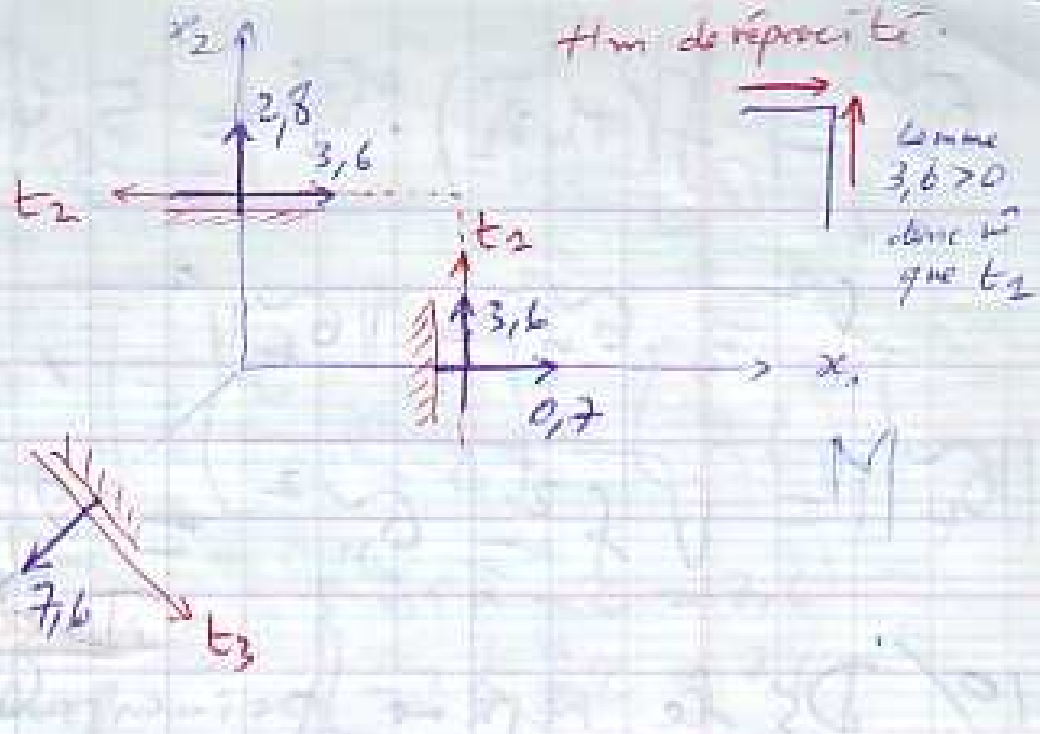
$$v_1/\vec{e}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$$v_2/\vec{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0,7 & 3,6 & 0 \\ 3,6 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix} \quad \vec{f}_1(\pi, \vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 3,6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2(\pi, \vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 3,6 \\ 2,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_3(\pi, \vec{x}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,6 \end{pmatrix}$$



$$\vec{f}(M, \vec{v}_1) = f_i = (\sigma_n, \sigma_t)$$

$$\vec{f}(M, \vec{v}_2) = f_i = (\sigma_n, \|\sigma_t\|) \text{ car } v_2 \rightarrow 3 \text{ compos } \neq 0$$

$$\vec{f}(M, \vec{n}) = \vec{c} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{f}(M, \vec{v}_1) = \begin{bmatrix} 0,7 & 3,6 & 0 \\ 3,6 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,4 \\ 4,5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{f}(M, \vec{v}_2) = \begin{Bmatrix} 1,96 \\ 3,68 \\ 4,38 \end{Bmatrix}$$

$\vec{v}_1$ :

$$\sigma_n = \vec{f}(M, \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 = 4,32 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_t = \vec{f}(M, \vec{v}_1) \cdot \vec{t}_1 = 2,69 \text{ daN/mm}^2$$

$$\vec{t}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$\tilde{\sigma}_n = f(M, \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_2 = 5,41 \text{ dan/min}^2$$

$$f^2 = \tilde{\sigma}_n^2 + \|\tilde{\sigma}_t\|^2, \quad f = 36,56 \left[ \frac{\text{dan}}{\text{min}^2} \right]$$

$$\|\tilde{\sigma}_t\| = \sqrt{f^2 - \tilde{\sigma}_n^2} = 2,7 \text{ dan/min}^2$$

Date: 14/12/2009

410/ Ds le repère principale des  $\tilde{\sigma}_i$   
dét les valeurs de  $\alpha$  pour qu'en M  
l'Etat soit :

- 1- cylindrique (révolution).
- 2- de cisaillement superposé à l'état  
hydrostatique.

Col 1:  $r, 5\alpha \geq 7,6$        $\varepsilon/\gamma = \begin{pmatrix} r, 5\alpha & 0 \\ 0 & 7,6 \\ 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$

$$\textcircled{1} \begin{cases} r, 5\alpha = 7,6 \\ 7,6 = -2\alpha \\ r, 5\alpha = -2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1,38 \\ \alpha = -3,8 \text{ X} \\ \alpha = 0 \text{ X} \end{cases}$$

d'où  $\boxed{\alpha = 1,38}$        $\xrightarrow{\text{Col 2}} \text{c-a-d } \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$

donc  $\alpha = \{1,38, 0\}$ .

$$\textcircled{2} \quad \bar{C}_{\text{cis}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ daN/m}^2, \quad \bar{C}_{\text{hydro}} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 5,5\alpha & 0 \\ 0 & 7,6 - 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5,5\alpha = 2 + p \\ 7,6 = p \\ -2\alpha = -2 + p \end{cases} \quad \begin{cases} 5,5\alpha - 2 = 7,6 \\ -2\alpha + 2 = 7,6 \end{cases}$$

$$3,5\alpha = 15,2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 4,34}$$

$$\boxed{2 = 16,27 \text{ daN/m}^2}$$

Exo 2:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1°/ Déterm  $\sigma_{11}$  pour qu'il  $\exists$  un plan selon lequel s'exerce un vect  $\vec{\sigma}$  n

2°/ Donner les composantes du vect unitaire normal à ce point.

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{b}_{11} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\tilde{b}_{11} - 2) \alpha_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{b}_{11} = 2}$$

$$\alpha_1 = -2\alpha_2$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_2$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \Rightarrow 4\alpha_2^2 + \alpha_2^2 + 4\alpha_2^2 = 1$$

$$\alpha_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{9}} = \pm \frac{1}{3}$$

$$\alpha_1 = \mp \frac{2}{3}$$

$$\alpha_3 = \pm \frac{2}{3}$$

$$v = \begin{Bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow v = \begin{Bmatrix} \oplus 2/3 \\ \oplus 1/3 \\ \oplus 2/3 \end{Bmatrix}$$



Exo3: On se propose de construire la matrice ds la base orthonormée  $\vec{x}_i$  du tenseur de  $\sigma$  en 1 pt  $M$ , sachant qu'on l'a fait expérimental<sup>u</sup> suivant:

- ①. le plan  $M \vec{x}_1, \vec{x}_2$  est tangent en  $M$  à la surface libre du milieu, c-à-d qu'aucune tension ne s'exerce sur cette facette.
- ②. la tension qui s'exerce sur la facette  $M \vec{x}_2, \vec{x}_3$  n'a pas de comp normale. seule la comp tang $\neq 0$
- ③. Comme la facette  $M \vec{x}_1, \vec{x}_3$ , la tension qui s'exerce sur  $M \vec{x}_2, \vec{x}_3$  est tang.

Evaluer le tenseur de  $\sigma$  en  $M$ .

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym} & & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{1} M \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rightarrow \text{normale } \vec{x}_3 (0, 0, 1)$$

$$f(M, \vec{x}_3) = 0$$

$$\textcircled{2} M(\vec{x}_1, \vec{x}_3) \longrightarrow \text{normale } \vec{x}_2$$

$$\vec{f}(M, \vec{x}_2) = f_i = (\tilde{\sigma}_{11}, \tilde{\sigma}_{12})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$f_2 = 0 \text{ ou } \tilde{\sigma}_{11} = 0$$

$$\textcircled{3} M(\vec{x}_2, \vec{x}_3) \longrightarrow \text{normale } \vec{x}_1$$

$$\vec{f}(M, \vec{x}_1) = f_i$$

$$\downarrow$$

$$f_1 = 0 \text{ ou } \tilde{\sigma}_{11} = 0$$

$$\textcircled{1} \vec{f}(M, \vec{x}_3) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & \tilde{\sigma}_{12} & \tilde{\sigma}_{13} \\ \tilde{\sigma}_{21} & \tilde{\sigma}_{22} & \tilde{\sigma}_{23} \\ \tilde{\sigma}_{31} & \tilde{\sigma}_{32} & \tilde{\sigma}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \tilde{\sigma}_{13} = 0 \\ \tilde{\sigma}_{23} = 0 \\ \tilde{\sigma}_{33} = 0 \end{matrix}}$$

$$\textcircled{2} \vec{f}(M, \vec{x}_2) = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{12} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{32} \end{Bmatrix}$$

$$\text{or } f_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\sigma}_{22} = 0}$$

$$\textcircled{3} \vec{f}(M, \vec{x}_1) = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{21} \\ \tilde{\sigma}_{31} \end{Bmatrix} \text{ or } f_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\sigma}_{11} = 0}$$

d'où

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\epsilon}_{12} & 0 \\ \tilde{\epsilon}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Etat de cisaillement ~~simple~~ pur

$$\begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_{11} & \tilde{\epsilon}_{12} \\ \tilde{\epsilon}_{12} & \tilde{\epsilon}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{12} \\ \tilde{\epsilon}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \tilde{\epsilon}_{22} = 0$$

Date: 03/01/2010

### III - Représentation géométrique des $\sigma$ :

L'état de  $\sigma$  en un pt donné est caractérisé par la valeur en ce pt du tenseur de  $\sigma$  c-à-d par 6 composantes, pour visualiser cette entité on a introduit diverses représentations géométriques.

#### 3-1 Ellipsoïde de LAMÉ: (quadrique des $\sigma$ )

C'est le lieu de l'extrémité du vect  $\sigma$  lorsque  $\vec{n}$  varie.

repère propre  $\bar{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$   $\vec{f}(M, \vec{n}) = f_i = (\sigma_i, n_i)$

$$= \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}$$

$$f_i = \sigma_i n_i \Rightarrow \boxed{n_i = \frac{f_i}{\sigma_i}}$$
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

$$\frac{f_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{f_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{f_3^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad \text{est du lieu géométrique.}$$

$$\vec{f} = f_i / X_i$$

Le lien géo est une ellipsoïde d'axes principaux et  $\frac{1}{2}$  axes  $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$  ds le plan, on parlera d'une ellipse principal

$\vec{C}/\vec{x}_i \rightarrow \vec{C}/\vec{x}_i$  EXP:

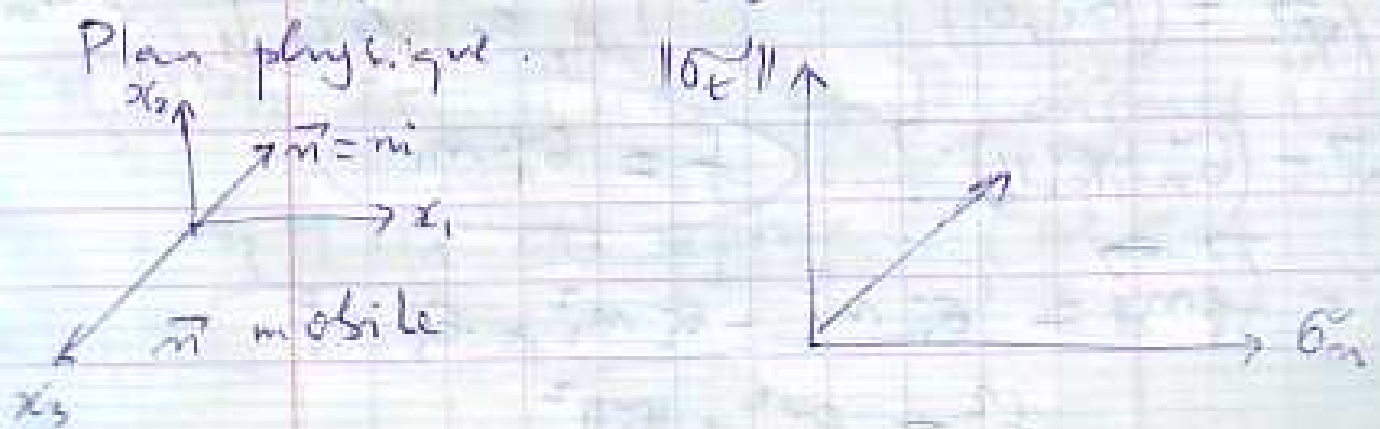
$$\begin{bmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

Rem: cette représentation à l'inconvénient car elle ne permet pas de visualiser le vec  $\vec{G}$  associé à la direction donnée.

### 3-2 Représentation de MOHR (tricercle de MOHR)

#### 3-2-1 Axes de MOHR:

$$\vec{f}(M, \vec{n}) = f_i(G_n, \|\vec{G}_n\|)$$





La rep de Mohr consiste à déf le vect  $\vec{\sigma}$  par sa composante  $\vec{\sigma}_n$  et tangente  $\|\vec{\sigma}_t\|$ , elle est plane, les axes portant les composantes  $\vec{\sigma}_n, \|\vec{\sigma}_t\|$  sont mobiles ds l'espace mais fixes ds la représentation de Mohr on se propose de défr le lien géométrique de l'extrémité du vect  $\vec{\sigma}$  ainsi déf.

Plaçant us ds un repère principal

$$\vec{X}_i = \begin{bmatrix} \vec{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{\sigma}_3 \end{bmatrix}$$

l'extrémité du vect  $\vec{\sigma}$  associée au plan de coupe de normale  $\vec{X}_i$

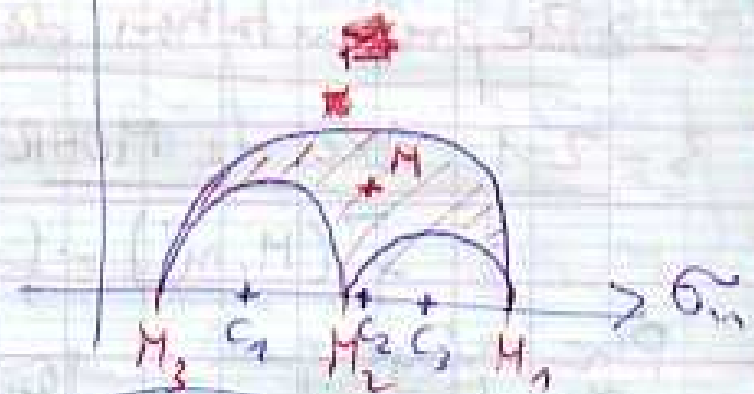
$$M_i / \vec{X}_i = (\vec{\sigma}_i, 0)$$

$$M / \vec{n} = (\vec{\sigma}_n, \|\vec{\sigma}_t\|) ?$$

$$f = \vec{\sigma}_i \cdot \vec{m}_i$$

$$\vec{\sigma}_n = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{\sigma}_i = \vec{\sigma}_1 m_1^2 + \vec{\sigma}_2 m_2^2 + \vec{\sigma}_3 m_3^2$$

$$\begin{cases} f^2 = \vec{\sigma}_n^2 + \|\vec{\sigma}_t\|^2 \\ \vec{\sigma}_n^2 + \vec{\sigma}_t^2 = \vec{\sigma}_1^2 m_1^2 + \vec{\sigma}_2^2 m_2^2 + \vec{\sigma}_3^2 m_3^2 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_1^2 m_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 m_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2 m_3^2 = \tilde{\sigma}_n^2 + \tilde{\sigma}_t^2 \\ \tilde{\sigma}_1^2 m_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 m_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2 m_3^2 = \tilde{\sigma}_n^2 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 \end{cases}$$

Pb 1: Etant donné une valeur de  $(\tilde{\sigma}_n, \text{Var})$

$\vec{m}$  ?? pour cela il us faut d'êt  
us avant un syst d'éq's en  $\mathbb{R}^2$  la  
solution est :

$$m_1^2 = \frac{\tilde{\sigma}_t^2 + (\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_2)(\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_3)}{(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2)(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3)} = \frac{\overline{M_2} \cdot \overline{M_3}}{\overline{M_2} \cdot \overline{M_3}} >$$

$$m_2^2 = \frac{\tilde{\sigma}_t^2 + (\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_3)(\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_1)}{(\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_3)(\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1)} = \frac{\overline{M_3} \cdot \overline{M_1}}{\overline{M_3} \cdot \overline{M_1}} <$$

$$m_3^2 = \frac{\tilde{\sigma}_t^2 + (\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_1)(\tilde{\sigma}_n - \tilde{\sigma}_2)}{(\tilde{\sigma}_3 - \tilde{\sigma}_1)(\tilde{\sigma}_3 - \tilde{\sigma}_2)} = \frac{\overline{M_1} \cdot \overline{M_2}}{\overline{M_3} \cdot \overline{M_2}} >$$

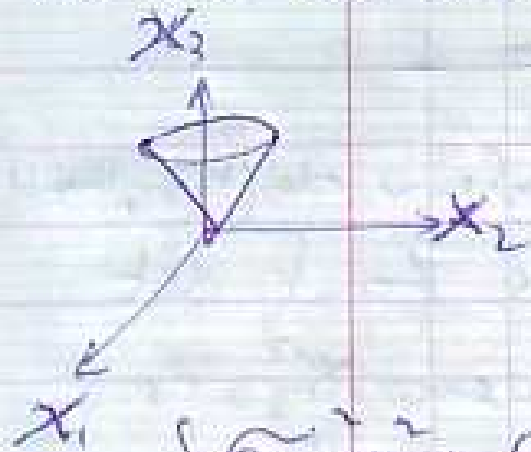
$\hat{M}_3 \hat{M}_2$  et  $\hat{M}_1 \hat{M}_2$  sont aïgues ( $\cos > 0$ )

$\hat{M}_3 \hat{M}_1$  est obtuse. ( $\cos < 0$ )

Pb2: Dé t du lien fœd du pt-M.

Prenons ds un 1er temps

$$\vec{n}_i = (n_i) (n_1, n_2, n_3)$$



\$\vec{n}\$ dœcrie un cone  
de rœvolution d'axe \$x\_3\$  
d'extrinsete cercle.

variables  
pennet

$$\begin{cases} \tilde{G}_1 n_1^2 + \tilde{G}_2 n_2^2 = \tilde{G}_n + \tilde{G}_t - \tilde{G}_3 n_3^2 \\ \tilde{G}_1 n_1^2 + \tilde{G}_2 n_2^2 = \tilde{G}_n - \tilde{G}_3 n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 = 1 - n_3^2 \end{cases}$$

Pour qu'il est solution rœelle, les 3  
relations / \$n\_1^2, n\_2^2\$ doivent œtre compatibles  
c-œ-d que le dœt gœnœral = 0.

$$\begin{vmatrix} \tilde{G}_1^2 & \tilde{G}_2^2 & \tilde{G}_n + \tilde{G}_t - \tilde{G}_3 n_3^2 \\ \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2 & \tilde{G}_n - \tilde{G}_3 n_3^2 \\ 1 & 1 & 1 - n_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} \tilde{G}_1^2 & \tilde{G}_2^2 & \tilde{G}_n + \tilde{G}_t \\ \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2 & \tilde{G}_n \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{G}_1^2 & \tilde{G}_2^2 & -\tilde{G}_3 n_3^2 \\ \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2 & -\tilde{G}_3 n_3^2 \\ 1 & 1 & -n_3^2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = -m_3^2 \begin{vmatrix} \tilde{G}_1^{-1} & \tilde{G}_2^{-1} & \tilde{G}_3^{-1} \\ \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2 & \tilde{G}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = (\tilde{G}_u^2 + \tilde{G}_t^2) (\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2) - \tilde{G}_u (\tilde{G}_1^2 - \tilde{G}_2^2) + (\tilde{G}_1^2 \tilde{G}_2 - \tilde{G}_2^2 \tilde{G}_1)$$

$$D_1 = (\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2) \left[ (\tilde{G}_u^2 + \tilde{G}_t^2) - \tilde{G}_u (\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2) + \tilde{G}_1 \tilde{G}_2 \right]$$

$$D_2' = K (\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2) (\tilde{G}_2 - \tilde{G}_3) (\tilde{G}_3 - \tilde{G}_1)$$

par identification à  $D_2'$  :

$$1. \tilde{G}_1^2 \tilde{G}_2 = -K \tilde{G}_1^2 \tilde{G}_2 \Rightarrow \boxed{K = -1}$$

$$\begin{aligned} D &= (\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2) \left[ (\tilde{G}_u^2 + \tilde{G}_t^2) - \tilde{G}_u (\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2) + \tilde{G}_1 \tilde{G}_2 \right] \\ &\quad + m_3^2 (\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2) (\tilde{G}_2 - \tilde{G}_3) (\tilde{G}_3 - \tilde{G}_1) \\ &= (\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2) \left[ \left( \tilde{G}_u - \frac{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}{2} \right)^2 + (\tilde{G}_t - 0)^2 + \tilde{G}_1 \tilde{G}_2 + m^2 (\tilde{G}_2 - \tilde{G}_3) (\tilde{G}_3 - \tilde{G}_1) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}{2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Cercle centré en  $C_i \left( \frac{G_i + G_j}{2}, 0 \right)$

de rayon

le lieu géo de l'extrémité de  $f$  ds la  
rep de MotR,  $m_3$  paramètre, est une famille  
de cercle au m centre en C.

Le cercle fondamental relatif à la direction

$X_3 \longrightarrow m_3 = 0$ , et l'intersection de  
cette famille de cercles avec l'axe de  $G_i$  se  
fait au pt correspondant aux valeurs  $G_i, G_j$   
donc  $M_1, M_2$ .

En général,  $m_i$  paramètre, famille de  
cercle concentrique en  $C_i \left( \frac{G_i + G_j}{2}, 0 \right)$

dans l' $\Pi$  des axes se fait en  $G_i, G_j$

Qd la normale  $\vec{n}$  varie le pt M reste  
ds la surface à courbure appelée tri cercle  
de MotR.



### 3-3 Etat plan de $\sigma$ :

Considérons état plan  $\sigma$ , direction privilégiée la direction tangentielle à la facette est alors orientée, et la  $\sigma'$  devienne en état d'après

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad \vec{n} = n_i = (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ \vec{t} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

$$\sigma_n = \vec{f} \cdot \vec{n} = (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2) n_1 + (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2) n_2 \\ \sigma_n = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\alpha + \sigma_{12} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_t = \vec{f} \cdot \vec{t} = \sin \alpha \cos \alpha (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \sigma_{12} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$\sigma_t = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha$$

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\alpha + \sigma_{12} \sin 2\alpha \\ \sigma_t = 0 - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\left( \sigma_n - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 - \left( \sigma_t - 0 \right)^2 = \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2$$

Cercle de centre  $\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0\right)$  de rayon

$$R^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2$$

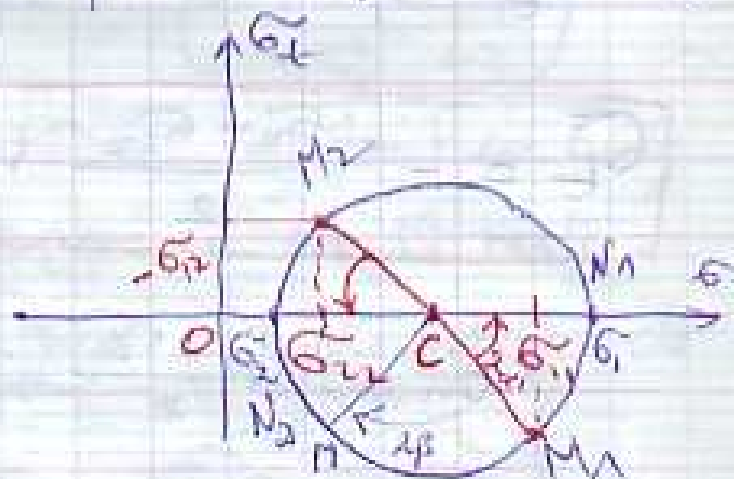
Rem: Pour obtenir le pt M correspondant à la normale  $\vec{n}$  formant un angle  $\alpha$  avec  $\vec{x}_1$  il faut tourner  $M_1/\vec{x}_1$  d'un angle  $2\alpha$  ds le sens trigo.

$M_1$  Extrémité du vect  $\vec{\sigma}$  ds MOHR associé au plan de coupe de normale  $\vec{x}_1$

$$M_1 \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}, M_2 \begin{pmatrix} \sigma_{22} \\ -\tau_{12} \end{pmatrix} \quad \sigma_{21} = -\tau_{12} !$$

$\begin{cases} M_1 \in \text{cercle} & (\text{satisfait l'eqt du cercle}) \\ \text{et} \\ M_2 \end{cases}$

sup:  $\sigma_{11} > \sigma_{22} > 0$   
 inf:  $\sigma_{12} < 0$



$$+ 2\alpha'$$

Pb1 : déterminant  $\tilde{G}_i$  et  $X_i$  et faire la représentation dans le plan physique Géométrique :

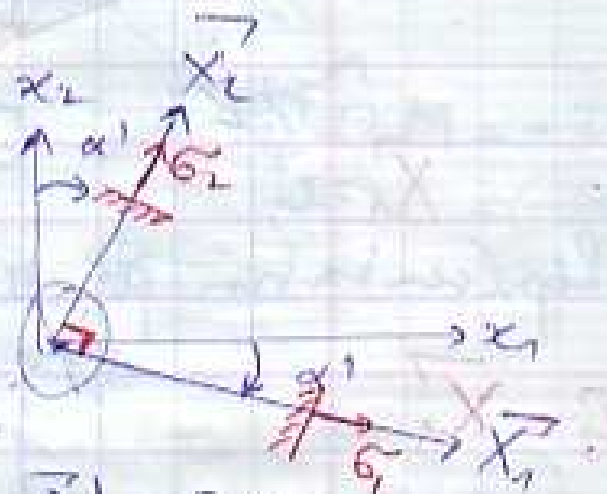
$$\left. \begin{array}{l} \tilde{G}_1 = OC + R \\ \tilde{G}_2 = OC - R \end{array} \right\} R^2 = \tilde{G}_{12}^2 + \left( \frac{\tilde{G}_{11} - \tilde{G}_{22}}{2} \right)^2$$

$$\boxed{\tilde{G}_{1,2} = \frac{\tilde{G}_{11} + \tilde{G}_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{G}_{11} - \tilde{G}_{22})^2 + 4\tilde{G}_{12}^2}}$$

plan physique

$$(\vec{x}_1, \vec{X}_1) = -\alpha'$$

$$(\vec{x}_2, \vec{X}_2) = -\alpha'$$



Pb2 : Etant donné une normale  $\vec{v} = (\alpha_i)$   $(\vec{x}_i, \vec{v}) = \beta > 0$  déter  $f'(M, \vec{v})$ .

$$M, \hat{C}M = 2\beta < 0$$

$$\tilde{G}_E = R \sin(\pi - 2\alpha' - 2\beta)$$

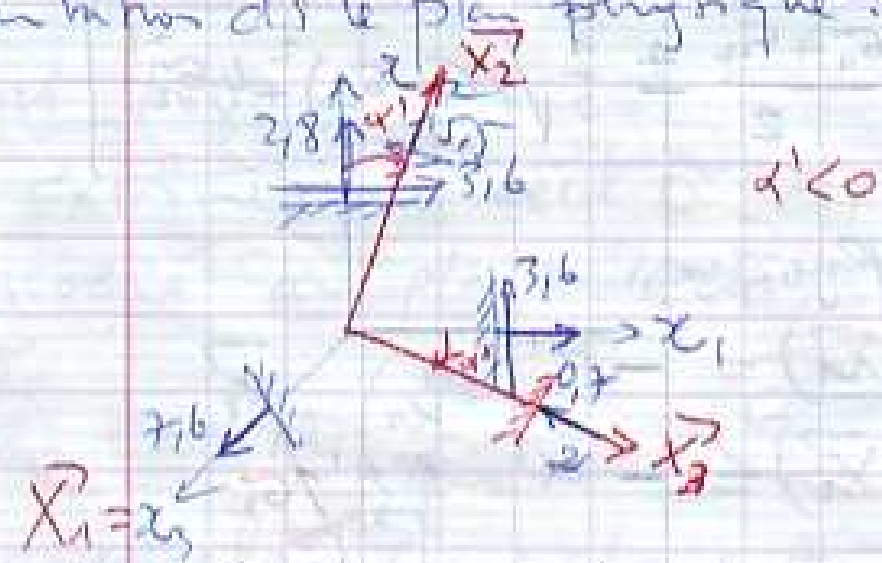
$$\tilde{G}_N = OC - R \cot(2\beta)$$

Date: 10/01/2020

# Application :

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0,7 & 3,6 & 0 \\ 3,6 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix} \quad d=1; \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0,7 & 3,6 & 0 \\ 3,6 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix}$$

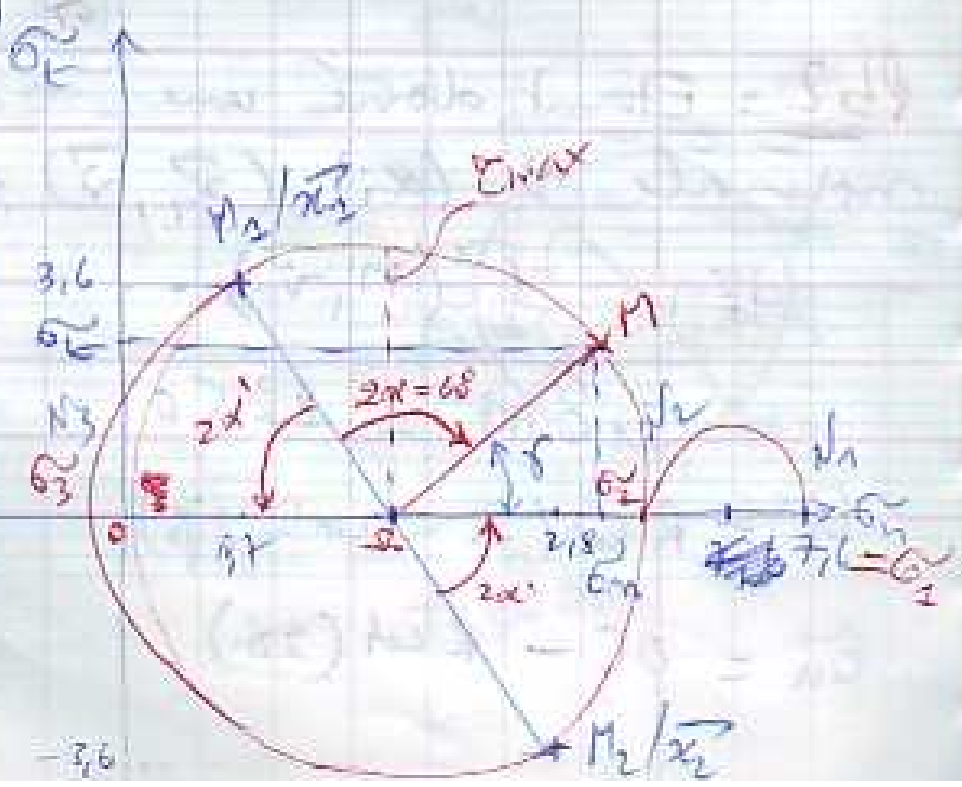
Représentation du plan principal :



Représentation par le cercle de Mohr :

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_1$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$



$$\tilde{G}_{2,3} = \frac{\tilde{G}_{11} + \tilde{G}_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{G}_{11} - \tilde{G}_{22})^2 + 4\tilde{G}_{12}^2}$$

$$\begin{cases} \tilde{G}_2 = 5,5 \\ \tilde{G}_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_2 \hat{\Omega} N_2 &= 2\alpha' > 0 & M_1 \hat{\Omega} N_3 &= 2\alpha' > 0 \\ (\vec{x}_2, \vec{x}) &= \alpha' < 0 & (\vec{x}_1, \vec{x}) &= \alpha' < 0 \end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha' = \frac{2\tilde{G}_{12}}{\tilde{G}_{11} - \tilde{G}_{22}} \Rightarrow 2\alpha' = 73,73^\circ$$

$$\alpha' = 36,86^\circ$$

$$\vec{m} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$M_1/\vec{x}_2 \rightarrow M_1 \hat{\Omega} M = -230^\circ = -60^\circ$$

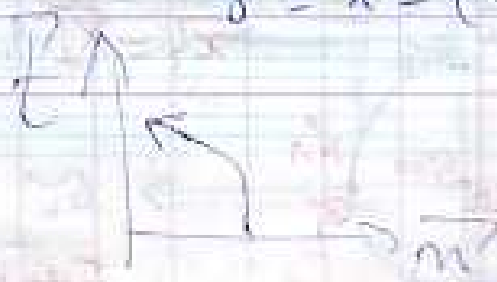
$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{G}_{11} - \tilde{G}_{22})^2 + 4\tilde{G}_{12}^2} =$$

$$R/\text{prop} = \frac{\tilde{G}_{11} - \tilde{G}_{22}}{2} = 3,75$$

$$\tilde{G}_L = R \sin \gamma$$

$$\tilde{G}_n = 0 - R \cos \gamma$$

$$\gamma = \pi - (2\alpha' + 2\alpha)$$





le mat. est -  $\tau$  : admet un max en cisaillement  $17 \text{ daN/mm}^2$

- Déterminer la valeur  $\alpha$  correspondante ?

$\alpha = 1$ , Then the TRESCA

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_{\text{critique}} \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)$$

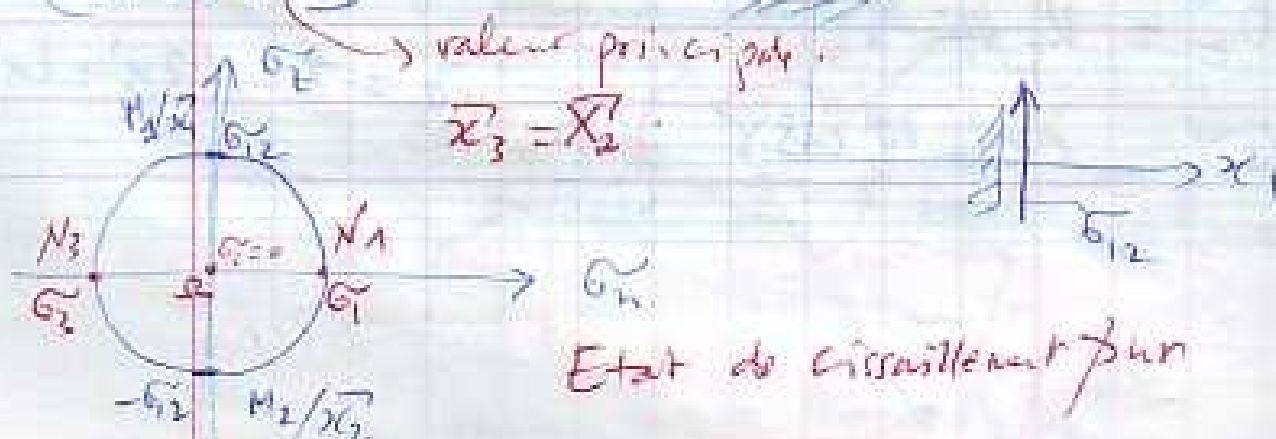
~~2~~ varie :

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} 7,6 \\ 5,5\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 5,5\alpha \\ 7,6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\max, 1} = \frac{5,5x + 2x}{2} \leq 17 \rightarrow x \leq 4,53$$

$$\Sigma_{\max 2} = \frac{7,6 + 2\alpha}{2} \leq 17 \rightarrow \alpha \leq 13,2$$

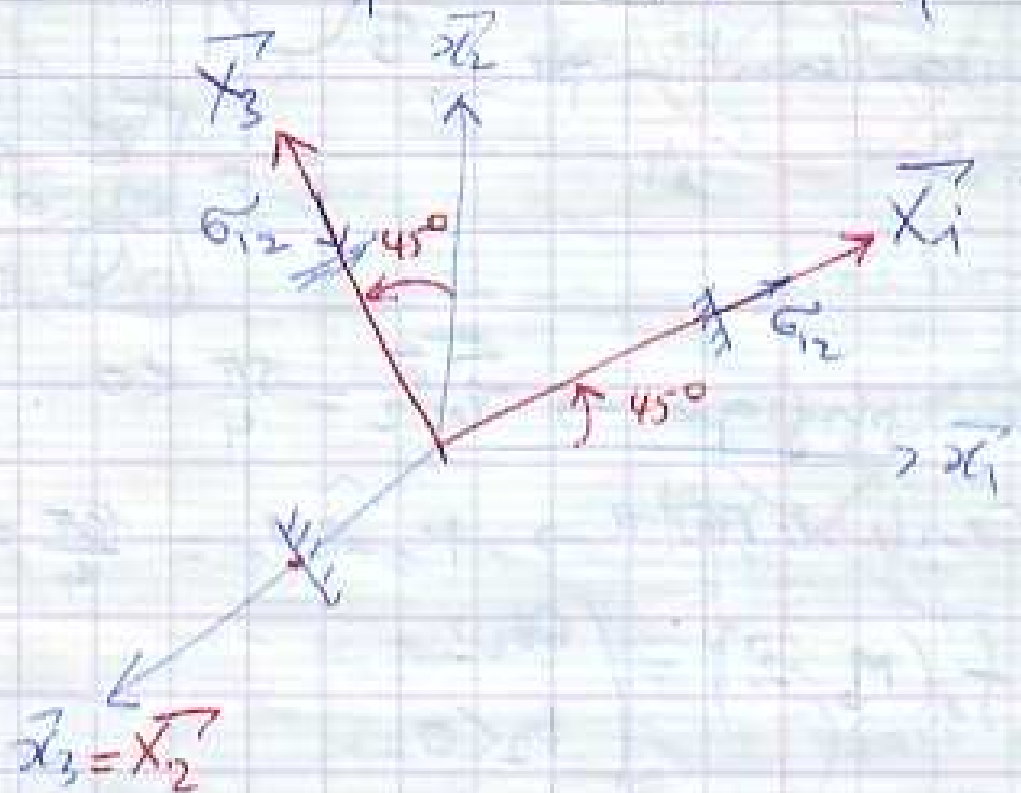
$$C_{11} = \begin{bmatrix} 0 & G_{12} & 0 \\ G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_{12} \rightarrow 0$$



$$\tilde{\sigma}_{1,3} = \pm \tilde{\sigma}_{12}$$

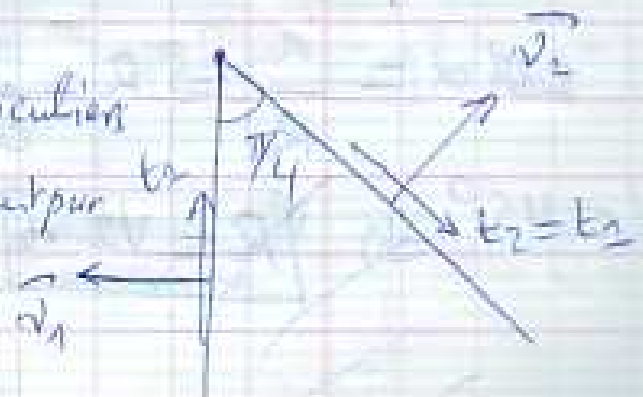
$$M_1 \wedge N_1 = -\pi/2 \quad | \quad M_2 \wedge N_3 = -\pi/2$$

$$\vec{x}_1, \vec{x}_3 = \pi/4 \quad | \quad \vec{x}_2, \vec{x}_3 = \pi/4$$

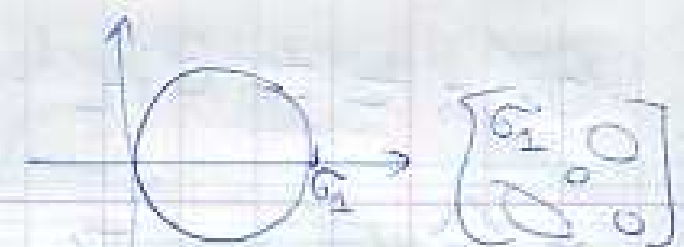


Ap: Soit un dièdre élastique  $t_2$  que l'on connaît les contraintes tangentielles sur les faces.

- Déterminer les états de  $\sigma$  par combinaison de compression, traction, cisaillement pur satisfaisant ces conditions.



1/ traction  $\rightarrow$  pte  $\rightarrow$

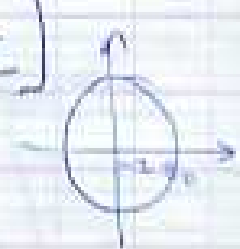


2/ compression  $\rightarrow$



3/ cisaillement  $\rightarrow$  ple  $\rightarrow$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix}$$



plan principal  $\rightarrow \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 = \frac{5\pi}{4} < 0$

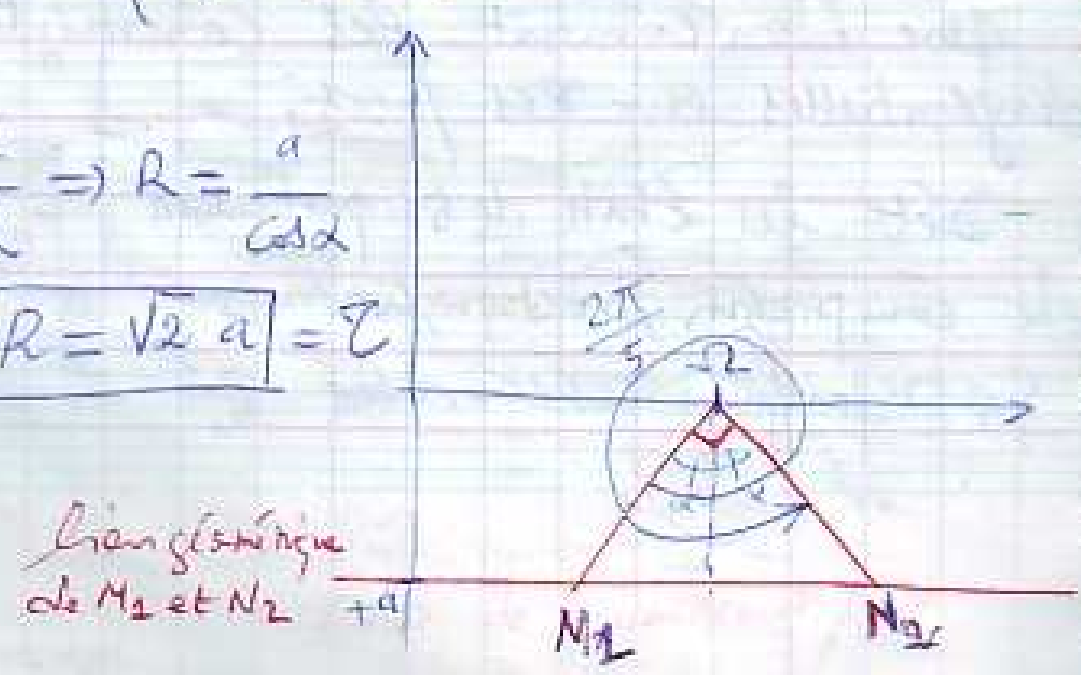
Cercle de Mohr  $\rightarrow M_2 \hat{=} N_2 = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2} > 0$

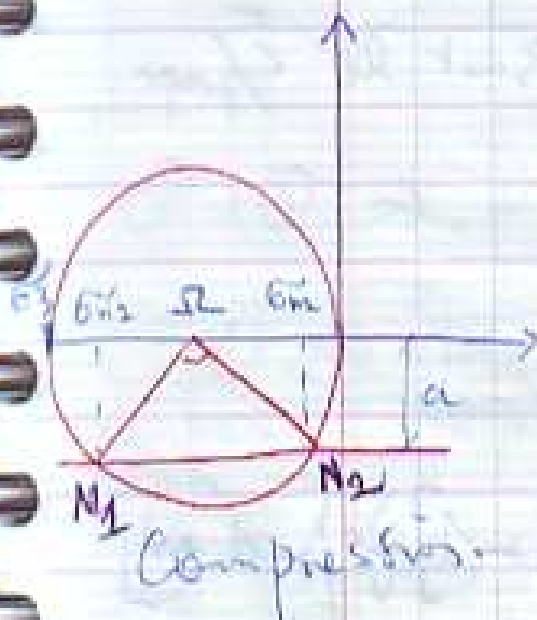
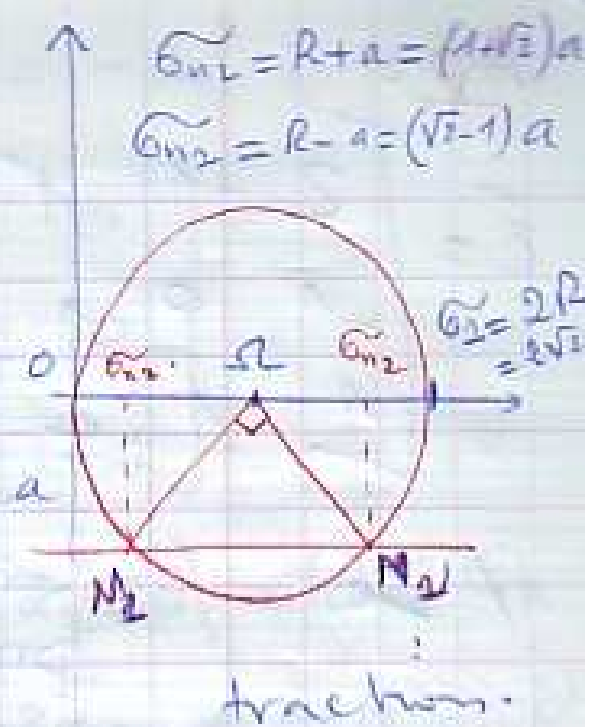
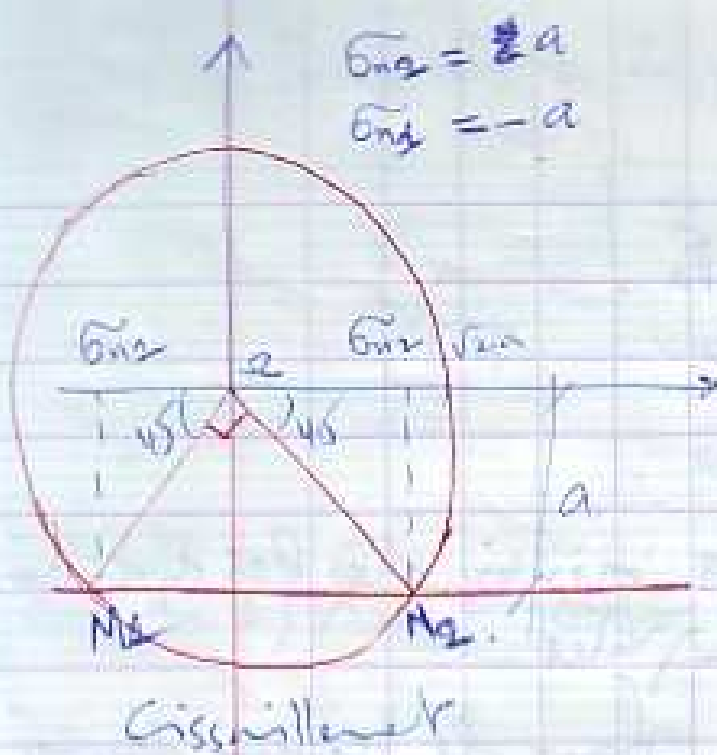
$$\bar{f}_1(M, \bar{\sigma}_1) = \begin{pmatrix} \sigma_{1a} \\ t_1 < 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}_2(M, \bar{\sigma}_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{1a} \\ t_2 = t_1 = a < 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{R} \Rightarrow R = \frac{a}{\cos \alpha}$$

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{2} a} = \tau$$

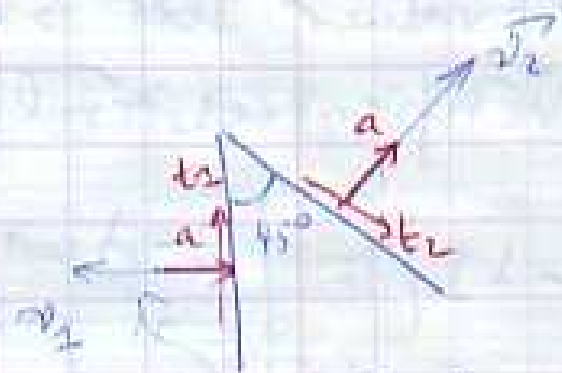




$$\sigma_{n2} = (1 - \sqrt{2})a$$

$$\sigma_{n2} = -(1 + \sqrt{2})a$$

$$\sigma_3 = -2\sqrt{2}a$$



$$\epsilon_{prop} = \begin{bmatrix} +a\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ap:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

1/ Déterminer les principales ainsi que les directions principales.

2/ Evaluer les 3 I pour le tenseur donné.  
Vérifier ces résultats en utilisant le  $\bar{C}_{\text{prop}}$ .

$$|\bar{C} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda) [-\lambda(2-\lambda) - 1] + 1 [-(2-\lambda) - 1] + 1 [-1 + \lambda]$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) + 2\lambda - 4 - 2(2-\lambda)$$

$$(2-\lambda) [\lambda^2 - 2\lambda - 1 - 2] \quad \Delta = 4 + 12 = 16$$

$$(2-\lambda) [\lambda^2 - 2\lambda - 3] \quad \lambda_1 = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$



$$\tilde{c}_1 = 3, \tilde{c}_2 = 2, \tilde{c}_3 = -1$$

$$\tilde{C}_{\text{prop}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(C - \lambda_1 I) \vec{X}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & \textcircled{1} \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 & \textcircled{2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} \Rightarrow -2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_3} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha_1^2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{X}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(C - \lambda_2 I) \vec{X}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_2 = \alpha_3} \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$3\alpha_2^2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\vec{X}_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\vec{X}_3 = \vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_3 = \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$|\vec{C} - \lambda \vec{I}| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6$$

$$I_2 = \text{trace } \vec{C} = 4$$

$$I_2 = 1, I_3 = -6$$

Vérification born:

$$I_2 = \sigma_i = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3 + 2 - 1 = 4$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = 6 - 2 - 3 = 1$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \underline{-6}$$

cest vérifié.

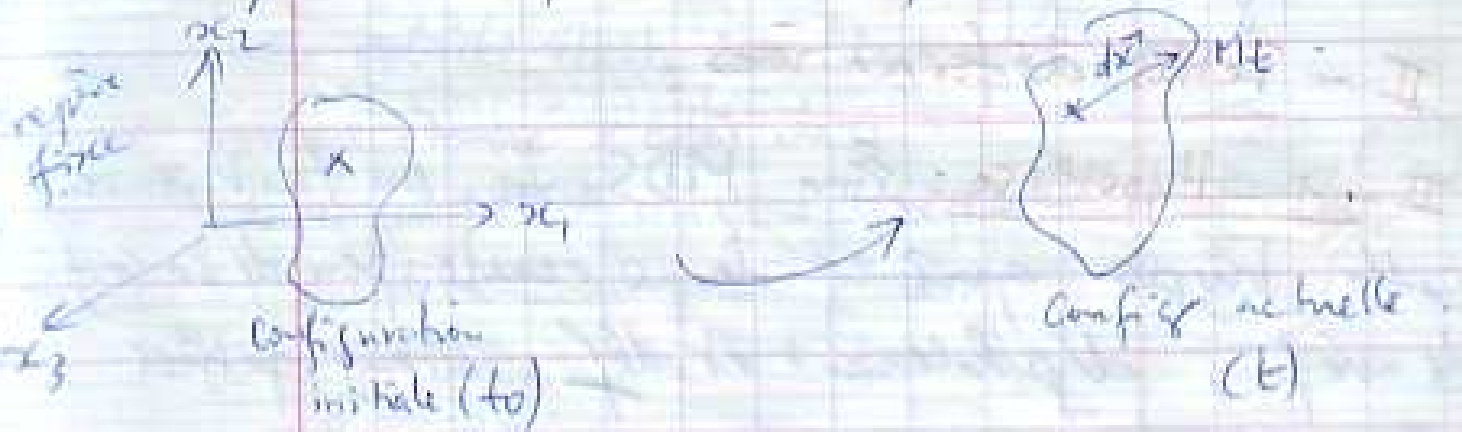
Chap:

Etudes des déformations

Date: 12/01/2020

## I / Grandes déformations :

Pour repérer la position d'une particule d'un MC,



il faut introduire un repère d'espace supposé fixe au cours du temps qu'on appelle référentiel (Espace Galiléen)

Le mouvement est décrit par  $x_i = x_i(a_i, t)$  qui donne la pos à l'instant ( $t$ ) de la particule  $M$  qui de la config de réf occupe la pos ( $a_i$ )

Les  $x_i$  variables euclidiennes,  $a_i$  variables spatiales

Lagrangien ou matérielles.

$$d\vec{a} = \overline{M M'} \xrightarrow{\text{transf}} \overline{M_t M'_t} = d\vec{x}$$

$$d\vec{x}_t = \frac{\partial \vec{x}_t}{\partial a_j} da_j$$

$$d\vec{x} = \vec{F} d\vec{a}$$

$F$  qui a un valeur mat de associe sur def  
dx est appelée Tenseur gradient de def.  
Caractérise la def locale c-à-d la def au  
voisinage du pt M.

## II - Petites déformations :

II-1 Hypothèse : En MDSolides on fait souvent  
cette hypo que solide s'écarte peu de sa config  
de réf, déplacement et def restant petites

2 conséquences s'en suivent :

1-  $\boxed{\alpha_i = \alpha_i'}$  ds la mesure où la différence  
entre les deux est négligeable, ceci est exact  
car certaines eqs s'écrivent naturellement en  
vars eulériennes (ex:  $d' \leq$ ) alors que d'autres  
s'écrivent en lagrangiennes.

ds ex:  $d' \leq$  ds la pos déformée ds la config telle  
qu'elle existe avant déformation, alors qu'il faudrait  
les écrire ds la config réelle où s'appliquent  
les efforts.

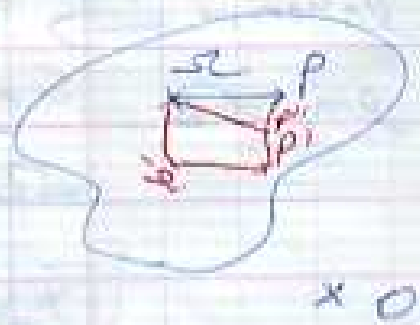
Cette approximation appelée linéarité externe  
justifiée à l'exception de certains phs de stabilité  
(flambement).

De tout les calculs, on ne conserve que les termes significatifs, on effectue ainsi une linéarisation autour du réf. supposé naturel, libre de  $\sigma$ .

## I. 2 Déformations au voisinage d'un point:

Soit un solide élastique dont 1 pt  $\Omega$  on ne veut pas changer l'état de  $\sigma$ .

On considère un pt  $O$  origine d'un repère fixe. Considérant un point  $P$  voisin de  $\Omega$ .



$$\overrightarrow{\Omega P} = dx_i$$

$$\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{x} = (x_i)$$

$$\overrightarrow{\Omega P'} = \overrightarrow{U}$$

$$\overrightarrow{P P'} = \overrightarrow{U} + d\overrightarrow{U}$$

traçant  $(\Omega P'') // (\Omega P')$

et la déformation au  $V(\Omega)$  est la transf qui fait passer du pt  $P \rightarrow P''$

$$\overrightarrow{P P''} = \overrightarrow{P P'} - \overrightarrow{P'' P'}$$

def d'ensemble  $\rightarrow$  translation

$$\overrightarrow{P P''} = d\overrightarrow{U}$$

$$d\overrightarrow{U} = d\overrightarrow{U}(dx_i), \quad dU_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$d\overrightarrow{U} = \begin{Bmatrix} dU_1 \\ dU_2 \\ dU_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix}$$



$$\partial_i^j = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}, \quad \overline{PP''} = \overline{D'} \cdot \overline{\Omega P}$$

$$\overline{PP''} \text{ est obtenue à partir de } \overline{\Omega P} \text{ par une transf} \quad \overline{D'} = \begin{bmatrix} \partial_1^1 & \partial_1^2 & \partial_1^3 \\ \partial_2^1 & \partial_2^2 & \partial_2^3 \\ \partial_3^1 & \partial_3^2 & \partial_3^3 \end{bmatrix}$$

linéaire  $\rightarrow$  transformation hodographe de l'axe en  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \overline{\Omega P''} &= \overline{\Omega P} + \overline{PP''} \\ &= \underbrace{[1 + \overline{D'}]} \overline{\Omega P} \end{aligned}$$

On passe du  $\overline{\Omega P}$   $\xrightarrow{\overline{D}}$   $\overline{\Omega P''}$  par une transformation linéaire  $[1 + \overline{D'}]$  c'est la matrice transformation en  $V(\Omega)$ .

### II - 3 Propriétés :

1. Une petite transf linéaire est tel que la mat hodographe à tout ces éléments petits devant l'unité

Thm : le produit de plusieurs petites transf linéaires est une petite transf linéaire dont la mat hodographe est la somme des mat hodographe des transf composantes :

$$\vec{x} \xrightarrow{A} \vec{x}' \quad \vec{x}' = (1 + \bar{B}) \vec{x}$$

$$\bar{B} = \bar{b}_{ij} \ll 1$$

$A, A'$  sont deux petites transf. linéaires :

$$\frac{A \circ A'}{\text{produit}} \quad \vec{x} \xrightarrow{A} (1 + \bar{E}) \vec{x}$$

$$\vec{x} \xrightarrow{A'} (1 + \bar{E}') \vec{x}$$

$$\vec{x} \xrightarrow{A} (1 + \bar{E}) \vec{x} \xrightarrow{A'} (1 + \bar{E}') \left[ (1 + \bar{E}) \vec{x} \right]$$

$$(1 + \underbrace{\bar{E} + \bar{E}'}_{\bar{B}'} + \underbrace{\bar{E} \bar{E}'}_{\text{négligé}}) \vec{x}$$

Rem: On peut décomposer la mat. hodgegraphique d'une petite déformation en plusieurs mat. dont ces éléments sont petits devant l'unité et considérer la transformation donnée comme produit de plusieurs transf. linéaires.

#### II - 4. Décomposition de la mat. hodge :

$$\bar{D}' = \bar{D}'_{\text{sym}} + \bar{D}'_{\text{antisym}}$$

$$\bar{D}' = \begin{bmatrix} \partial_1' & \partial_2' & \partial_3' \\ \partial_2' & \partial_1' & \partial_3' \\ \partial_3' & \partial_3' & \partial_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1' & \frac{\partial_2' + \partial_1'}{2} & \frac{\partial_3' + \partial_1'}{2} \\ \text{sym} & \partial_2' & \frac{\partial_3' + \partial_2'}{2} \\ & & \partial_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial_1' - \partial_2'}{2} & \frac{\partial_1' - \partial_3'}{2} \\ \frac{\partial_2' - \partial_1'}{2} & 0 & \frac{\partial_2' - \partial_3'}{2} \\ \frac{\partial_3' - \partial_1'}{2} & \frac{\partial_3' - \partial_2'}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

On pose:  $e_i = \partial_i^i$

$$g_{jk} = \frac{\partial_j^i + \partial_k^i}{2}$$

$$p_{jk} = \frac{\partial_j^i - \partial_k^i}{2}$$

$$\bar{\bar{D}}'_{\text{sym}} = \begin{bmatrix} e_1 & g_3 & g_2 \\ & e_2 & g_1 \\ \text{sym} & & e_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{D}}'_{\text{anti}} = \begin{bmatrix} 0 & p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & 0 \end{bmatrix}$$

### III Etude des transf:

3-1  $\bar{\bar{D}}'_{\text{anti}} \text{ sym}$

$$\vec{P}(P_i), \quad \vec{\Omega P} = (dx_i)$$

$$\overline{PP}'' = \bar{\bar{D}}' \begin{matrix} \vec{eP} \\ \downarrow \\ \begin{cases} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{cases} \end{matrix} = \begin{cases} p_3 dx_2 - p_2 dx_3 \\ -p_3 dx_1 + p_1 dx_3 \\ p_2 dx_1 - p_1 dx_2 \end{cases} = \underline{\vec{P} \wedge \vec{\Omega P}}$$

- la transformation  $\bar{D}'_{anti}$  est une rotation instantanée et petite, c'est une déf pure, c-à-d qu'elle ne modifie pas les cond de  $\bar{\Gamma}$  du milieu.

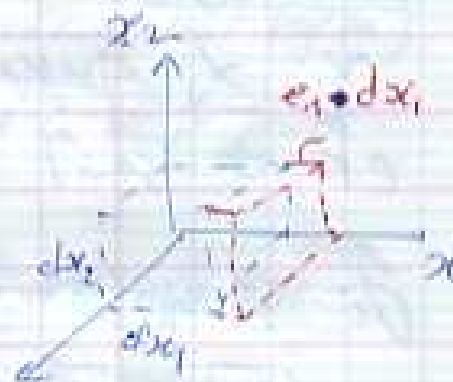
3-2  $\bar{D}'_{sym}$ :

sous  $e_j$ :

$$\bar{p}p' = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{cases} = \begin{cases} e_1 dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

transformé  
1 +  $\bar{D}'$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 + e_1) dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{cases}$$



- la transf sous  $e_i$ , ne modifie  $x_3$  pas les  $dx_j$ ,  $dx_k$  mais multiplie  $dx_i$  par  $e_i$  c'est une affinité //  $ox_i$  de rapport  $1 + e_i$  et de plan de  $ox_i$ .

$e_i$  dilution linéaire selon  $x_i$ .

sous  $g_k$ :

$$\bar{p}p' = \begin{bmatrix} 0 & g_3 & 0 \\ g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{cases} = \begin{cases} g_3 dx_2 \\ g_3 dx_1 \\ 0 \end{cases}$$

le transformé:

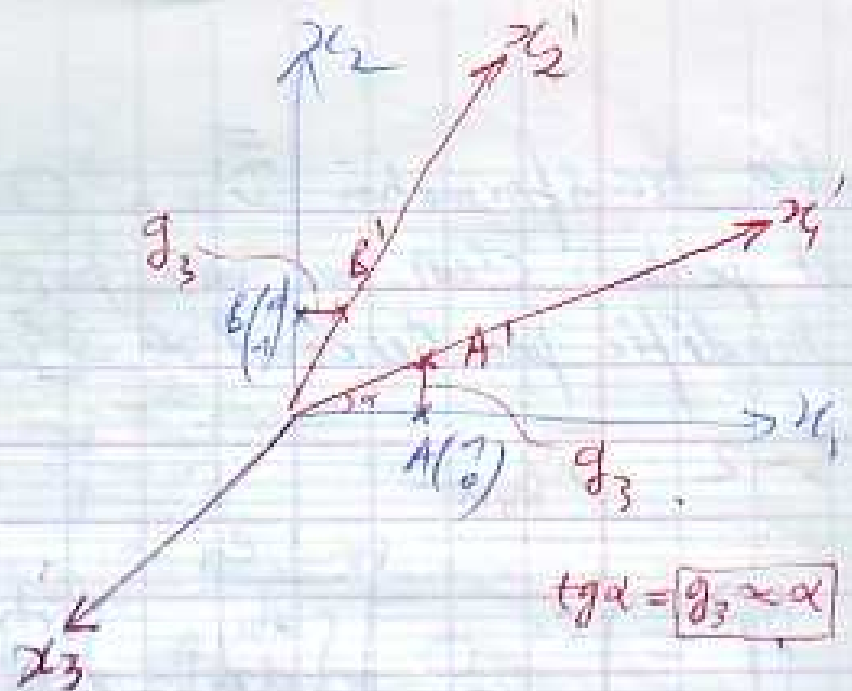
$$\begin{cases} dx_1 + g_3 dx_2 \\ dx_2 + g_3 dx_1 \\ dx_3 \end{cases}$$

$$dx_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ g_3 \\ 0 \end{pmatrix} A'$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dx_2 \rightarrow \begin{pmatrix} g_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} B'$$

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\tan \alpha = g_3 \approx \alpha$$

Sous  $g_{12}$  = les axes  $x_i, x_j$  sont transf en  $x'_i, x'_j$  passant par l'origine situés ds le m plan et se sont rapprochés ( $g_i > 0$ ) de  $(2g_i)$ .

$g_i$  = déviation relative à l'axe  $x_i$ .

imp

$$(U \perp dU)$$

translation + Rotation +  $\vec{\epsilon}$  (def linéaire / angulaire)

not insignifiant  
n'affectent pas les  
cond de milieu

$$\vec{\epsilon}_{\text{sym}}$$



## IV - Etude de la déformation

### 4-1 définition d'un vecteur déf relatif à la direction

$\vec{v}(xi) \rightarrow \vec{d}(x, \vec{v})$  est le vecteur déplacement de l'extrémité du vect unitaire de la transf donnée

$$\vec{d} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{v} \quad \text{si : déf linéaire} \rightarrow G_{ij}$$

$$\vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{v} \quad \text{si : " angulaire} \rightarrow G_{ij}$$

$\vec{v} \rightarrow \vec{d}$  par opérateur linéaire (ant sym)

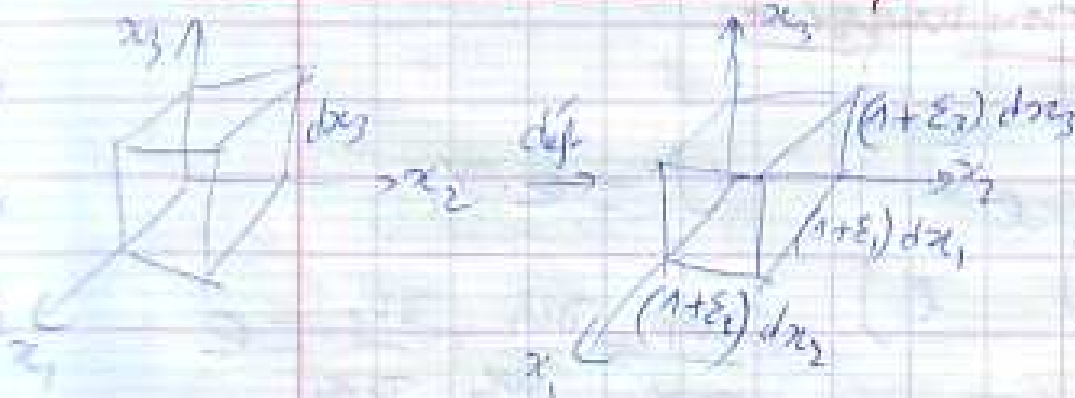
ou d'intensité constante et de la déf pure.

$\vec{\varepsilon}$  a 6 comp que  $\vec{c}$ .

- Existence de 3 direction invariant orthogonales

$$\vec{\varepsilon} \text{ est déf linéaire} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 4-2 dilatabilité volumique



$$\frac{\Delta V}{V} = \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{trace } \vec{\varepsilon} = I_1$$

$$\begin{cases} V_0 = dx_1 dx_2 dx_3 \\ V_d = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) dx_1 dx_2 dx_3 \end{cases}$$

La dilatation  $\vec{V}(\alpha_i)$  est la projection du vect  $\vec{d}$  relatif à cette direction sur celle  $\vec{m}$ .

$$d = \vec{d} \cdot \vec{v} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} e_1 & g_3 & g_2 \\ g_3 & e_2 & g_1 \\ g_2 & g_1 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 g_3 + \alpha_3 g_2 \\ \alpha_1 g_3 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 g_1 \\ \alpha_1 g_2 + \alpha_2 g_1 + \alpha_3 e_3 \end{cases}$$

$$d = e_i \alpha_i^2 + 2 g_{ij} \alpha_i \alpha_j$$

$$d/x_i = \varepsilon_1 \alpha_1^2 + \varepsilon_2 \alpha_2^2 + \varepsilon_3 \alpha_3^2$$

#### 4-4 Exemples de déf homogène:

##### 4-4-1 Dilatation uniforme:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} e & & \\ & e & \\ & & e \end{bmatrix} \quad U_i = e x_i$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = e$$

##### 4-4-2 Extension simple:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & -\beta & \\ & & -\beta \end{bmatrix} \quad U = (\alpha x_1 - \beta x_2 - \beta x_3)$$

$$e = \alpha - 2\beta = \text{trace } \vec{\varepsilon}$$

Si trace le fait sans charge de volume

$$\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2\beta}$$

4-4-3 Géométrie 2 - pl.

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{U} = (\gamma x_2, 0, 0)$$

$$\vec{V} = (0, \gamma x_1, 0)$$

TD:

Date: A/04/2011

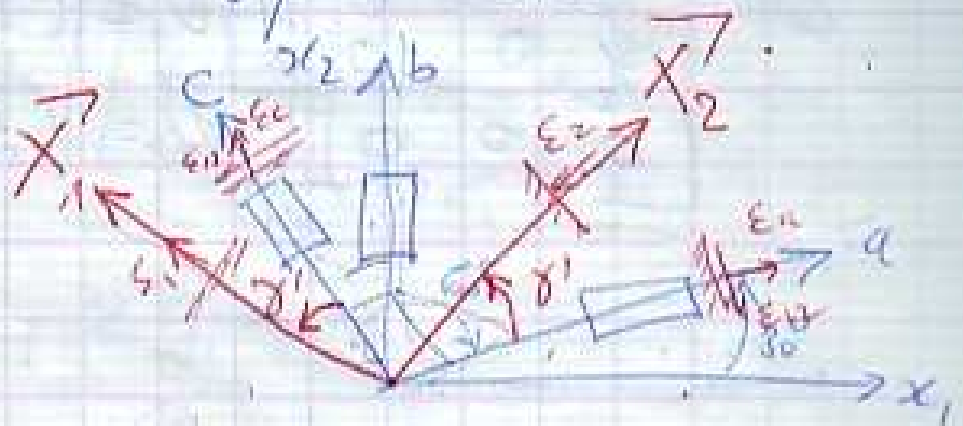
Exo1: à l'aide des syst de Jauges selon 3 directions :

1/ Déterm les déf principales ainsi que les directions p associées.

$$\varepsilon_a = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_b = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_c = 8 \cdot 10^{-4}$$



$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_a & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_c \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_b = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\varepsilon_b = (\underline{\varepsilon} \cdot \vec{v}_b) \cdot \vec{v}_b$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_a & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \varepsilon_a + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{12} \\ 1/2 \varepsilon_{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_a + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{12} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_c \right)$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_a + \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon_{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon_{12} + \frac{3}{4} \varepsilon_c$$

$$4\varepsilon_b - 3\varepsilon_c - \varepsilon_a = 2\sqrt{3} \varepsilon_{12}$$

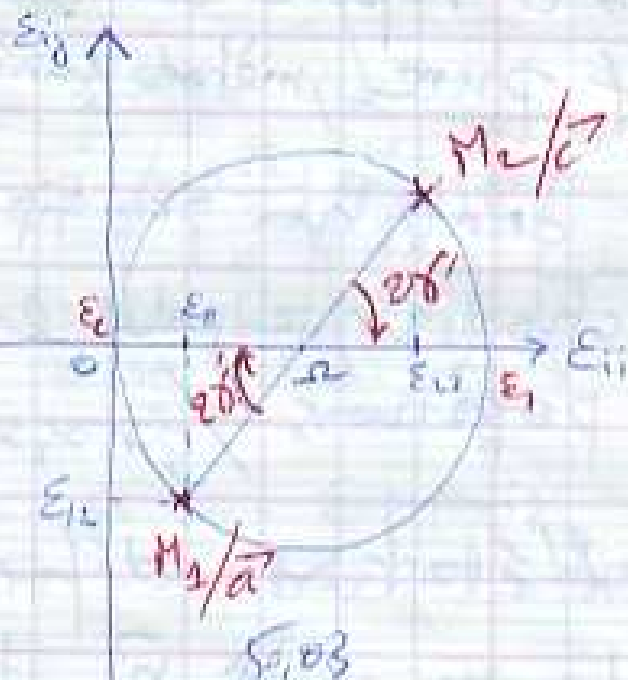
$$\Rightarrow \varepsilon_{12} = \frac{4\varepsilon_b - 3\varepsilon_c - \varepsilon_a}{2\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon_{12} = -4,04 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & -4,04 \\ -4,04 & 8 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{1}{2} 2\theta' = \frac{2\varepsilon_{12}}{|\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}|}$$

$$2\theta' = 53,4^\circ$$



$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}$$

$$\varepsilon_1 = 10,03 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = -0,03 \cdot 10^{-4} = -3,4 \cdot 10^{-6}$$



Exo2: Un milieu continu homogène et isotrope, la déf est élastique et rapportée à un trièdre tri-rectangle direct caractérisée par les  $f_{ij}$  de dep :

$$\vec{U} = (ax_1, -bx_2, bx_1 + ax_2, a\sqrt{3}x_2)$$

1°/ Déterm le repère considéré et en utilisant la déf pure, mettre en évidence la rotation.

2°/ Déterm dilatation principale, définir les directions principales en  $M$ , précisant leur position /  $Ox, x_1, x_2$

3°/ Déterm l'état de déformation associé à la normale  $\vec{n}$  tq  $\vec{x}_1, \vec{n} = +45^\circ$ .

$$d\vec{U} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & -a\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & a\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}_{\text{sy}} \qquad \mathcal{E}_{\text{anti}}$

Antis:

$$\tilde{D}_{\text{anti}} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} -b dx_2 \\ b dx_1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} dx_3 \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} dx_2 \end{cases}$$

$$\vec{P} \begin{pmatrix} -\frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}, \quad \vec{P} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} -\frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b dx_2 \\ -b dx_1 + \frac{a\sqrt{3}}{2} dx_3 \\ -\frac{a\sqrt{3}}{2} dx_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{\text{sy}}: \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad a \xrightarrow{\text{E principal}} \vec{x}_1 = (1, 0, 0) \rightarrow \text{direction}.$$

$$(a-\lambda) \left[ -\lambda(a-\lambda) - \frac{3a^2}{4} \right] = (a-\lambda) \left[ \lambda^2 - a\lambda - \frac{3a^2}{4} \right].$$

$$\Delta = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2a \quad \vec{x}_2 = \vec{x}_1$$

$$\lambda_1 = \frac{a+2a}{2} = \frac{3a}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{a}{2} \quad \begin{pmatrix} \frac{3a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = a$

$$\begin{pmatrix} 3a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3a/2 & a\sqrt{3}/2 \\ 0 & -a\sqrt{3}/2 & a/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a/2 \alpha_1 = 0 \\ 3a/2 \alpha_2 + a\sqrt{3}/2 \alpha_3 = 0 \\ -a\sqrt{3}/2 \alpha_2 + a/2 \alpha_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{\alpha_3}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \frac{\alpha_3^2}{3} + \alpha_3^2 = \frac{4}{3} \alpha_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1 = \vec{X}_1 \wedge \vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \quad , \quad \vec{F} = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$d = \vec{F} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} + \cancel{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \cancel{\frac{a}{2}}$$

$$\boxed{EK \neq \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right)}$$

$$\boxed{E_n = a}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} + \cancel{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \cancel{\frac{a}{2}} = \cancel{\frac{a}{2}}$$

$$\boxed{EK \neq \frac{1}{2} \left( -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right)}$$

$$\boxed{E_t = 0}$$

## Suite du cours:

Il  $\exists$  6 composantes en déf et 3 en dép, il est possible de se donner 3 fct q/q suffisamment dérivables et d'en déduire les 6 fct  $E_{ij}$ , il n'est pas possible de se donner arbitrairement 6 fct  $E_{ij}$  et d'en déduire 3 fct de dép (6 eqts diff pour 3 inconnues)  $\Rightarrow$  il devrait exister 3 relations liant les  $E_{ij}$  du pt de vue mathématique, ces relations exprimeraient des restrictions sur la forme des  $E_{ij}$  pour que le système d'eqt différentiel soit compatible. Ces cond d'intégrabilité sont appelées Cond' de compatibilité, qui assurent l' $\exists$  du champ de dép et non son unicité. Les dép sont obtenus à des ctes près, et par les cond. aux limites.

$$2 \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 E_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 E_{jj}}{\partial x_i^2}$$



$$\gamma_{ij} = g_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\boxed{\gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$i=1, j=2$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)$$

## Application:

Soit le champ de déf plane défini

$$\varepsilon_{11} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{x_2^2}{a^2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{x_1 x_2}{a^2}$$

Sachant qu'à l'origine on a un état de contrainte parfait: que  $U_3 = 0$ ;  $U_1, U_2$  indép

de  $x_3$ , proposer des dép possibles en accord avec ce champ donné.

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{a^2} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_1^2} = \frac{2}{a^2}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 0}$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \rightarrow \gamma_{12} = \frac{2x_1 x_2}{a^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{2}{a^2}}$$

Vérification:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

$\Rightarrow$  l'existence de  $U$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2}$$

$$U_1 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{x_1^3}{3} + x_2^2 x_1 \right) + F_1(x_2, x_3)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{x_2^2}{a^2} \Rightarrow U_2 = \frac{x_2^3}{3a^2} + F_2(x_1, x_3)$$

$$U_3 = 0$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \frac{2x_1 x_2}{a^2}$$

$$\frac{\partial F_2(x_2, x_3)}{\partial x_1} + \frac{2x_1 x_2}{a^2} + \frac{\partial F_1(x_2, x_1)}{\partial x_2} = \frac{2x_1 x_2}{a^2}$$

$$\frac{\partial F_1(x_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2(x_1)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = C$$

$$U_1 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{x_1^3}{3} + x_2^2 x_1 \right) + C x_2 + K_1$$

$$U_2 = \frac{x_2^3}{3a^2} - C x_1 + K_2$$

Contrôle aux limites

à l'origine  $(0, 0, 0) \Rightarrow U_i = 0$

$$\Rightarrow K_1 = K_2 = 0$$

2% la rotation nulle:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \frac{2x_1 x_2}{a^2} + C = 0$$

$$\Rightarrow C = - \frac{2x_1 x_2}{a} \Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\boxed{C=0}$$

Dualité  $(\bar{\epsilon})$  et  $(\bar{E})$  :

1. Généralités : le travail des efforts internes par unité de volume :

$$W_{int} = \bar{\epsilon} \cdot \bar{\epsilon} \quad \text{il met en dualité le}$$

tenseur de  $\sigma$  et le tenseur de  $\epsilon$  pure. C'est une prop. tout à fait vérifiée et universelle. En effet, de toutes théories de Milieu Continu, y'a relation entre la schématisation des efforts intérieurs  $(\bar{\epsilon})$  et la description cinématique  $(\bar{E})$ .

2. Lois de comportement : (intrinsèques).

La loi fondamentale de la dynamique ou de la statique :  $\vec{F}_s + \vec{F}_v = \rho \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$

Loi fondamentale  $\rightarrow$  éqs reliant les  $\sigma$  de  $\sigma$  par inconnues  $\sigma_{ij}$  de 3  $\epsilon_i$  et de  $\rho$ .

Pour un milieu déformable,  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{E}$  ne sont pas indep et chaque milieu caractérisé par la loi réologique ou loi de comportement qu'il faut schématiser, c-à-d pour chaque milieu, se donner des actions mathématiques simples.



qui prise compte avec exactitude  
du comportement réel du milieu (solide).

qui est un comp complexe qm n'est  
pas possible de mettre au pt une eqt  
ni un syst d'eqts qui décrivent le comp  
Compte tenu de tout les paramètres intervenant.

En pratique, on procède à une formulation  
séparée d'eqts, chaque une des d'eqts mathématiques  
à pour but, l'approximation d'observation physique  
d'un milieu réel ds un domaine limité.

Les catégories du milieu existent en fait des  
lois de comportement, 2 lois sont idéalisées, l'une  
pour les solides, l'autre pour les fluides,  
constitue les extrémités d'un spectre du milieu.

Loi de Hooke:  $\sigma = E \epsilon$ .

mono-axial:

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \quad , \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu \epsilon_{xx} \quad (\text{effet poisson})$$

Loi de Newton: (fluide visqueux)

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (\dot{\epsilon} : \text{vitesse de déf})$$

### 3 - Déf du schéma élastique, linéaire, homogène isotrope et isotherme :

Loi de Hooke généralisée. (E3D).

L'expérience montre que bcp de milieux solides déformables et notamment les mat de construction métalliques, ont le comportement ci-dessus.

1<sup>er</sup> axiome : linéarité :

Il  $\exists$  état initial privilégié (quasi naturel) où le champ de  $\bar{\epsilon}_0(\vec{x})$  est suffisamment faible devant  $\bar{\epsilon}(\vec{x}) \longrightarrow \bar{\epsilon}_p(\vec{x}) \ll \bar{\epsilon}(\vec{x})$  pour pouvoir estimer les variations des composantes de  $\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}$  sont des  $f_{\text{lin}}$  linéaires, des  $\bar{\sigma}_{ij}$  du  $\bar{\epsilon}$  infinitésimal.

$$\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = \underbrace{d_{ijkl}}_{\text{tenseur du 4<sup>ème</sup> ordre}} \epsilon_{kl}$$

$d_{ijkl}$  apparaissent comme des composantes d'un tenseur du 4<sup>ème</sup> ordre, tenseur d'élasticité en  $M(\vec{x})$ .  
Les composantes ne dépendent que des prop du milieu, sont  $f_{\text{ct}}$  du pt  $\vec{x}$  du pt  $M$ .

## 2<sup>ème</sup> Axiome : isotropie

Les MDC à l'exception du bois dépendent assez bien d'un pt de vue macroscopique à l'extérie, n'admettent aucune direction privilégiée ds l'état initial, le tenseur d'élasticité qui ne dépend que des prop du milieu  $\Rightarrow$  tenseur isotrope, c-à-d que c'est un tenseur dont les composantes ds une base arbitraire de  $E_3$  doivent être invariantes par une transformation orthogonale arbitraire, le tenseur d'élasticité est symétrique en  $ij$  d'ordre 4

$$d_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}]$$

$\lambda, \mu$  sont deux scalaires const du pt caractéristique du milieu suivant un S.E.L.i

## 3<sup>ème</sup> Axiome d'homogénéité :

D'un pt de vue macroscopique le milieu est homogène au moins par morceaux, c-à-d peut être décomposé en sous domaines homogènes sur lesquels, les 2 coeff d'élasticité linéaires isotropes,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les m<sup>êmes</sup> en tl pt

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{gij} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$$

#### 4 - Etude de la loi élastique:

##### 4.1 Formulation $\tilde{\sigma} = E \tilde{\varepsilon}$ généralisée:

##### 4.1.1 Loi élastique uniaxiale:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ -\nu \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \varepsilon_{xx} \end{bmatrix}$$

##### 4.1.2 Généralités:

Etat uniaxial	CG	Déformation		
		$\varepsilon_{ii}$	$\varepsilon_{jj}$	$\varepsilon_{kk}$
$x_1$	$\tilde{\sigma}_{11}$	$\tilde{\sigma}_{11}/E$	$-\nu \tilde{\sigma}_{11}/E$	$-\nu \tilde{\sigma}_{11}/E$
$x_2$	$\tilde{\sigma}_{22}$	$-\nu \tilde{\sigma}_{11}/E$	$\tilde{\sigma}_{22}/E$	$-\nu \tilde{\sigma}_{22}/E$
$x_3$	$\tilde{\sigma}_{33}$	$-\nu \tilde{\sigma}_{11}/E$	$-\nu \tilde{\sigma}_{33}/E$	$\tilde{\sigma}_{33}/E$

$$\Sigma_{ii} = \frac{1}{E} \left[ \tilde{\sigma}_{ii} - \nu (\tilde{\sigma}_{jj} + \tilde{\sigma}_{kk}) \right]$$

##### 4.2 Etude:

en axes principaux

$$\tilde{\bar{C}} = \tilde{\bar{C}}_i + \tilde{\bar{C}}_d, \quad \tilde{\bar{C}}_i = \frac{\text{trace } \tilde{\bar{C}}}{3} \delta_{ij}$$

$$\tilde{\bar{C}}_d = \begin{bmatrix} m_1 & t_3 & t_2 \\ m_1' & t_3' & t_2' \\ m_2 & t_1 & t_1' \end{bmatrix} \quad \text{trace } \tilde{\bar{C}}_d = 0$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}_d + \bar{\bar{\epsilon}}_i, \quad \bar{\bar{\epsilon}}_i = \frac{\text{trace } \bar{\bar{\epsilon}}}{3} \delta_{ij}$$

$$\text{trace } \bar{\bar{\epsilon}}_i = \text{trace } \bar{\bar{\epsilon}}$$

$$\text{trace } \bar{\bar{\epsilon}}_d = 0 \Rightarrow \theta_d = 0 \Rightarrow \text{déviation}$$

07/02/2010

→ Relation  $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$  en axes  $q/q$  :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_d + \bar{\bar{\sigma}}_i \quad \text{q} : \bar{\bar{\epsilon}}_i = \frac{\text{trace } \bar{\bar{\epsilon}}}{3} \cdot I$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}_d + \bar{\bar{\epsilon}}_i$$

$$\text{trace } \bar{\bar{\epsilon}}_i = \text{trace } \bar{\bar{\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \text{trace } \bar{\bar{\epsilon}}_d = 0$$

$\theta = \text{trace } \bar{\bar{\epsilon}} \Rightarrow$  pas de variation de volume.  
mais variation de forme

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & g_3 & g_2 \\ g_1 & \epsilon_2 & g_1 \\ g_2 & g_1 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_m & & \\ & 0 & \\ & & \epsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1' & g_3 & g_2 \\ g_3 & \epsilon_2' & g_1 \\ g_2 & g_1 & \epsilon_3' \end{bmatrix} \quad \text{q} : \epsilon_1' + \epsilon_2' + \epsilon_3' = 0$$

déf isotrope

déf de déviation pure

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & & \\ & 0 & \\ & & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1' & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2' & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3' \end{bmatrix}$$

$\bar{\sigma}$  d'isotropie

$\bar{\sigma}$  de déviation



$$\tilde{\sigma}_{ii} = \tilde{\sigma}_{ii}' + \tilde{\sigma}_m$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} \left[ \tilde{\sigma}_m (1-2\nu) + \tilde{\sigma}_{ii}' - \nu (\underbrace{\tilde{\sigma}_{jj}' + \tilde{\sigma}_{kk}'}_{=0}) \right]$$

$$\tilde{\sigma}_{ii}' + \tilde{\sigma}_{jj}' + \tilde{\sigma}_{kk}' = 0 \Rightarrow \quad \quad \quad -\tilde{\sigma}_{ii}'$$

$$\text{donc } \varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} \left[ (1-2\nu) \tilde{\sigma}_m + (1+\nu) \tilde{\sigma}_{ii}' \right]$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1-2\nu}{E} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_m & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_m & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_m \end{bmatrix} + \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_{33}' \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1-2\nu}{E} \underline{\underline{\tilde{C}}}_i + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\tilde{C}}}_d$$

$$= \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_i + \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_d$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_i = \frac{1-2\nu}{E} \underline{\underline{\tilde{C}}}_i \\ \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_d = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\tilde{C}}}_d \end{array} \right.$$

Ces relations matricielles obtenues en axes principaux restent valables en axes gls puisque le charg<sup>2</sup> d'axe multiplie les mat des 2 membres par la mat transformation charg<sup>1</sup> d'axe.

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}_i - \bar{\bar{\epsilon}}_d = \frac{E}{1-2\nu} \bar{\bar{\epsilon}}_i + \frac{E}{1+\nu} \bar{\bar{\epsilon}}_d$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\epsilon}} &= E \left( \frac{1}{1-2\nu} - \frac{1}{1+\nu} \right) \bar{\bar{\epsilon}}_i + \frac{E}{1+\nu} \bar{\bar{\epsilon}} \\ &= E \frac{3\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \bar{\bar{\epsilon}}_i + \frac{E}{1+\nu} \bar{\bar{\epsilon}} \end{aligned}$$

Poisson's

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = 3\lambda \bar{\bar{\epsilon}}_i + 2\mu \bar{\bar{\epsilon}}$$

$\theta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \text{trace } \bar{\bar{\epsilon}}$   
dilatation volumique

$$\begin{aligned} m_i &= \lambda \theta + 2\mu e_i \\ t_i &= 2\mu g_i \end{aligned}$$

Formules de LAMÉ  
en axes v.

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\epsilon}} &= \bar{\bar{\epsilon}}_i + \bar{\bar{\epsilon}}_d = \frac{1-2\nu}{E} \bar{\bar{\epsilon}}_i + \frac{1+\nu}{E} \bar{\bar{\epsilon}}_d \rightarrow \bar{\bar{\epsilon}} - \bar{\bar{\epsilon}}_i \\ &= -\frac{3\nu}{E} \bar{\bar{\epsilon}}_i + \frac{1+\nu}{E} \bar{\bar{\epsilon}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{1+\nu}{E} m_i - \frac{3\nu}{E} m_m \\ g_i &= \frac{1+\nu}{E} t_i \end{aligned}$$

## → Effet thermique:

Supposant une variation uniforme de la  $T^\circ$  et de l'effet thermique sur  $\sigma$  et  $\epsilon$ .



⊕ libre de dilater ( $\epsilon \neq 0, \sigma = 0$ ).

← R retour à l'état initial.

Cas général:

( $\epsilon = 0, \sigma \neq 0$ )

→ si le solide est libre de se dilater.

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T, \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \alpha \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \Delta T \end{bmatrix} = \bar{\epsilon}_i \rightarrow \bar{\sigma}_i$$

→ Retour à l'état initial:

$$\bar{\epsilon}_f = 0 = \bar{\epsilon}_{i1} + \bar{\epsilon}_{i2} \Rightarrow \bar{\epsilon}_{i2} = \begin{bmatrix} -\alpha \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \Delta T \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\sigma}_{i2}$$

$$\bar{\sigma}_{i2} \text{ tq: } \begin{cases} \tau_i = \sigma + 2\mu \epsilon_i \\ t_i = 2\mu g_i \end{cases}$$

$$0 = -3\alpha \Delta T$$

$$\begin{cases} \tau_{iT} = -3\lambda \alpha \Delta T + 2\mu (-\alpha \Delta T) = -\alpha \Delta T (3\lambda + 2\mu) \\ t_T = 0 \end{cases}$$

↓ on

Formules  
de LAME

$$\begin{cases} \tau_i = \sigma + 2\mu \epsilon_i - \alpha \Delta T (3\lambda + 2\mu) \\ t_i = 2\mu g_i \end{cases}$$

Effet thermique

→ Critères de  $\frac{R}{T}$  à la déf permanente:

Ds une expérience de traction sur une éprouvette on appelle limite élastique, la valeur de la  $\sigma$  uniaxiale qu'il ne faut pas dépasser pour ne pas avoir de déf permanente, pour un milieu isotrope où les directions principales du  $\bar{\epsilon}$  sont connues, on appellera limite élastique la valeur d'une certaine  $f$  des v.p de  $\bar{\epsilon}$  qu'il ne faut pas dépasser, on peut écrire une telle condition.



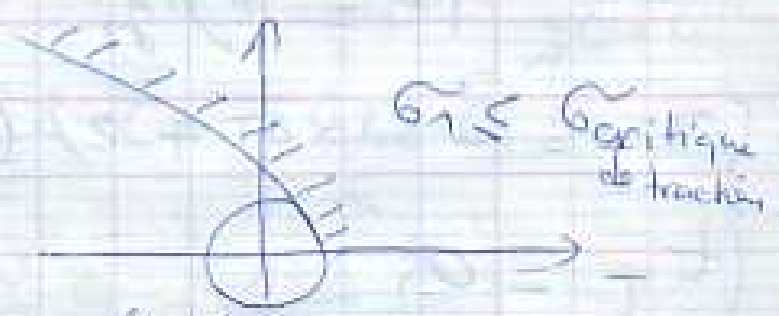
1ère critère  $\sqrt{\sigma_1^2 + 4\sigma_2^2} \leq \bar{\sigma}$

4ème critère  $\sqrt{\sigma_1^2 + 3\sigma_2^2} \leq \bar{\sigma}$

Cette courbe donnée par  $f(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3) = 0$  est dite Courbe intrinsèque de limite élastique du matériau.

• Cas de matériaux fragiles ou collants:

Béton, verre  
↓  
mal à la traction



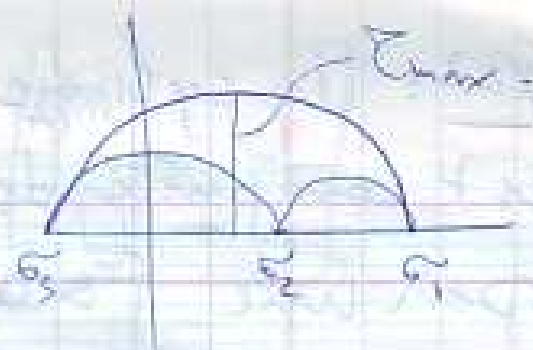
• Cas de mat ductiles ou plastiques:

Faillesse vis-à-vis du cisaillement (scission)

2 critères  $\begin{cases} \text{VON MISES} \\ \text{GUET et TRESCA} \end{cases}$

TYRESKA:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leq 4 \sigma_{cr}^2$$



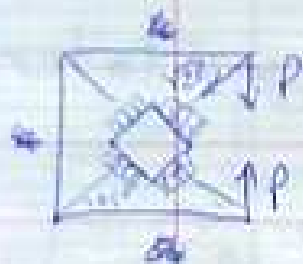
VON MISE:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leq K \sigma_{cr}^2$$

Application:

Exo1: Un cube en béton est comprimé suivant 2 directions  $\perp$  de la manière indiquée ci-dessous.  
 $a = 10\text{cm}$ ,  $\sigma$  uniformément répartie.

- Déterm. la variation du cube de volume.  $\nu = 0,2$   
 $P = 10\text{KN}$   
 $E = 28 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$



$x_3$  direction privilégiée

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{P\sqrt{2}}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{P\sqrt{2}}{a^2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{E} \frac{P\sqrt{2}}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{E} \frac{P\sqrt{2}}{a^2} \end{pmatrix}$$

comp  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} - \nu(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$

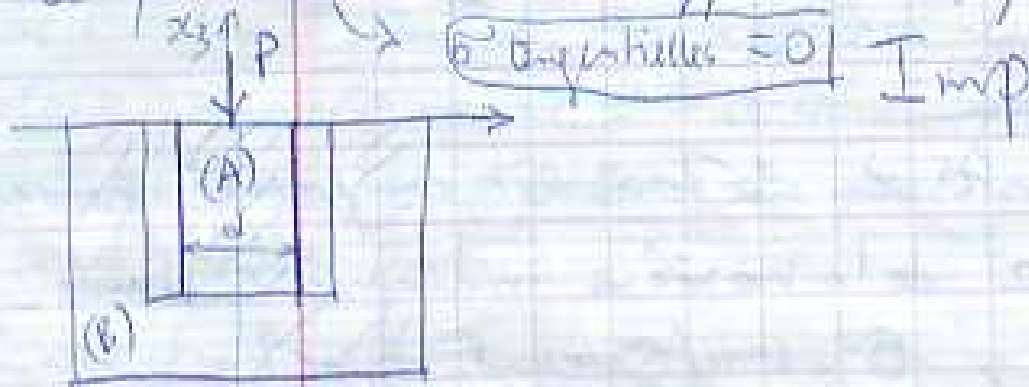
$$\theta = \frac{\Delta V}{V=a^3} = \frac{2(1-\nu)}{E} \frac{P\sqrt{2}}{a^2} + \left( -\frac{2\nu}{E} \left( \frac{P\sqrt{2}}{a^2} \right) \right)$$

On a  $\Delta V = \frac{2a(1-2\nu)P\sqrt{2}}{E}$   $P < 0$   
 $-8,07 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^3$



Exo2: Un cylindre en caoutchouc de  $\phi$  et  $l$  est comprimé ds le cylindre en acier (B) par une force  $P$ .

Dét la  $\sigma$  entre (A) et (B) en négligeant le frottement et en supposant (B) parfaitement rigide.



Sans contact:

Le caoutchouc est libre de se dilater.

$$\bar{\bar{C}}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{A} \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\bar{\Sigma}}_A = \begin{bmatrix} -\frac{\nu P}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu P}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P}{EA} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{C}}_B = 0 \rightarrow \bar{\bar{\Sigma}}_B = 0$$

Avec contact: le retour à l'E-I.

(B) rigide  $\rightarrow \Sigma_{11} = \Sigma_{22} = 0 \rightarrow$  réaction entre A et B.  
 (B) non rigide  $= \sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ .

$$\bar{\bar{C}}_A = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{22} \\ & & P/A \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{C}}_B = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{22} \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Condition limite (B) rigide:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[ \tilde{\sigma}_{11} - \nu(\tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\sigma}_{33}) \right] = 0$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[ \tilde{\sigma}_{22} - \nu(\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{33}) \right] = 0$$

de  
l'élasticité

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}_{22} = \tilde{\sigma}$$

$$\tilde{\sigma} \left( \frac{1}{E} - \nu \right) = \nu \frac{P}{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\sigma} = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{P}{A}}$$

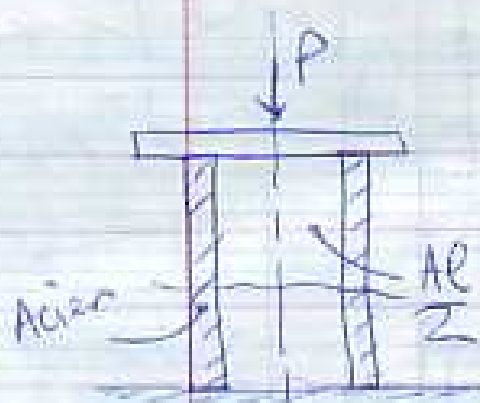
d'où

$$\bar{\bar{C}}_A = \frac{P}{A} \begin{bmatrix} \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\bar{E}}_A$$

$$\bar{\bar{C}}_B = \frac{P}{A} \begin{bmatrix} \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\bar{E}}_B$$

Ex:

Date: 14/02/2010



d'ensemble est comprimé entre 2 plaques rigides

Donner  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{E}$  ds l'acier et l'Al.

Données:  $A_{Acier} = d = 9 \text{ cm}$   
 $E_s = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Al:  $d_{Al} = 7,5 \text{ cm}$   $P = 24 \cdot 10^3 \text{ Kg}$   
 $E_{Al} = 7,8 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Cond aux limites:

$$\epsilon_{33Acier} = \epsilon_{33Al} \quad (\text{plaques rigides})$$

$$\bar{\epsilon}_{Acier} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33Acier} \end{bmatrix}$$

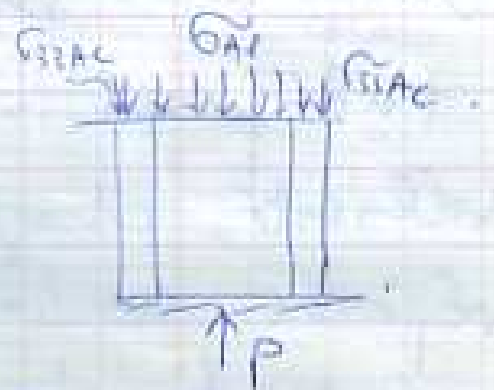
$$\bar{\epsilon}_{Al} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33Al} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{33Acier} = \frac{1}{E_s} \left[ \sigma_{33Acier} - \nu (0 + 0) \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{33Acier} = \sigma_{33Al} \\ E_s \end{array} \right.$$

$$\epsilon_{33Al} = \frac{1}{E_{Al}} \left[ \sigma_{33Al} - \nu (0 + 0) \right]$$

$$\vec{\epsilon}_{Aerie} = \begin{pmatrix} \frac{2}{E_s} \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{E_s} \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_s} \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_{33AC}}{E_s} = \frac{\tilde{\sigma}_{33AE}}{E_{AE}} \quad (1)$$



et d'où :

$$P = \tilde{\sigma}_{AE} A_{AE} + \tilde{\sigma}_{AC} A_{AC} \quad (2)$$

Compte tenu de la relation :

$$\textcircled{1} \Rightarrow \tilde{\sigma}_{AC} = \frac{E_s}{E_{AE}} \tilde{\sigma}_{AE} \quad (3)$$

$$\textcircled{2} \text{ ds } \textcircled{3} \Rightarrow P = \tilde{\sigma}_{AE} \left[ A_{AE} + \frac{E_s}{E_{AE}} A_{AC} \right]$$

$$A_{AE} = \frac{\pi d^2}{4} = 44,17 \text{ cm}^2$$

$$45,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{AC} = \frac{\pi d^2}{4} = 1,76 \text{ cm}^2$$

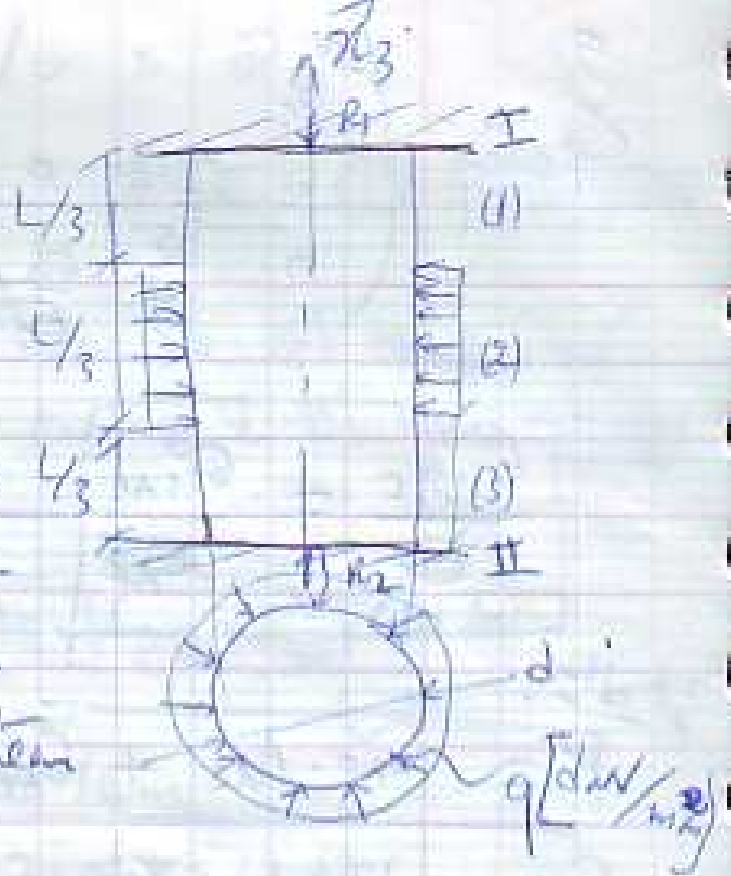
$$d = 9 \text{ cm} - 7,5 \text{ cm} = 1,5 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}_{AE} = 126 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tilde{\sigma}_{AC} = 947 \text{ Kg/cm}^2$$

Ex 02:

Un poteau est serré  
entre deux parois I, II  
il se déforme indéformable  
sollicité, charge uniform  
répartie sur la surface  
superficielle du poteau  
Déterm  $\bar{C}$  et  $\bar{E}$ .



en négligeant le poids  $\sum F_{xi} = 0$

$$R_1 = R_2 = R$$

R : comp

E.C.G. :  $L = \text{cte} \Rightarrow \Delta l_{\vec{x}_3} = 0$

Partie (1) :  $\bar{C}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{A} \end{bmatrix} \rightarrow \bar{E}_{1,3} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu R}{E A} & 0 \\ 0 & -\frac{\nu R}{E A} \\ 0 & \frac{R}{EA} \end{bmatrix}$   
et (3)

Partie (2) :  $\bar{C}_2 = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \\ 0 & \frac{R}{A} \end{bmatrix}$   $q : \text{comp}$



$$\vec{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} \frac{q(1-\nu)}{E} - \frac{R}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{q(1-\nu)}{E} - \frac{R}{EA} \\ \frac{L}{EA} - \frac{2\nu q}{E} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Comme  $L = \text{cte}$ .

$$\begin{cases} \Delta L_1 = \Delta L_3 = \frac{R}{EA} \frac{L}{3} \\ \Delta L_2 = \frac{L}{3} \left( \frac{R}{EA} - \frac{2\nu q}{E} \right) \end{cases}$$

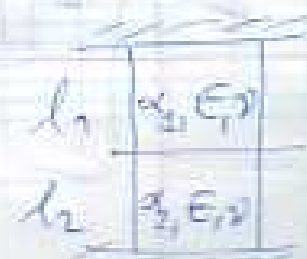
$$2\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0 \Rightarrow \frac{2RL}{EA} + \frac{LR}{EA} - \frac{2\nu qL}{E} = 0$$

$$\frac{3RL}{EA} = \frac{2\nu qL}{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{2}{3} \nu q A}$$

EX: Soit  $T_0$ : Température de réf et un barreau cylindrique de rayon  $a$ , qu'on place à une  $T_{\text{unif}} = (T > T_0)$ .

- Calculer champ de  $\sigma$ , de  $\varepsilon$ , variation de longueur et  $\Delta r$ .



10/ poutres indéformables inextensibles :

$$\Delta l = 0$$

$$\boxed{l_1 \varepsilon_{33} + l_2 \varepsilon_{33} = 0} \in C-G$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_1 = \bar{\bar{\varepsilon}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & 0 \\ 0 & & \tilde{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_i = -\frac{\nu}{E} \text{Trac} \bar{\bar{\varepsilon}} + \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \bar{\bar{\varepsilon}}_i + \alpha \Delta T \bar{\bar{I}}$$

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} \tilde{\varepsilon}_{33} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \tilde{\varepsilon}_{33} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\text{Moy} \bar{\bar{\varepsilon}}_i = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{E} \tilde{\varepsilon}_{33} + \alpha \Delta T & & \\ & -\frac{\nu}{E} \tilde{\varepsilon}_{33} + \alpha \Delta T & \\ 0 & & \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{E} + \alpha \Delta T \end{bmatrix}$$

$$l_1 \left[ \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{E} + \alpha_1 \Delta T \right] + l_2 \left[ \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{E} + \alpha_2 \Delta T \right] = 0$$

$$\epsilon_{33} \left( \frac{l_1}{E} + \frac{l_2}{E} \right) = - [l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2] \Delta T$$

$$\epsilon_{33} = - \frac{[l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2] E \cdot \Delta T}{l_1 + l_2} \quad \text{comp.}$$

$$\text{2nd } \Delta L_1 = l_1 \cdot \epsilon_{33}$$

$$\Delta L_1 = - \frac{l_1 [l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2] \Delta T}{l_1 + l_2} + \frac{\alpha_2 l_2 \Delta T (l_1 + l_2)}{l_1 + l_2}$$

$$= - \frac{l_1 l_2 \alpha_2 \Delta T}{l_1 + l_2} - \frac{l_1^2 \alpha_1 \Delta T + \alpha_2 l_1 \Delta T}{l_1 + l_2}$$

$$= - \frac{l_1 (l_2 \alpha_2 + l_1 \alpha_1)}{l_1 + l_2}$$

$$\Delta L_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) l_1 l_2 \Delta T}{l_1 + l_2}$$

$$\Delta L_2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) l_1 l_2 \Delta T}{l_1 + l_2}$$

$$30/V_i = \pi r^2 L$$

$$V' = \pi (r + dr)^2 (L + dL)$$

$$= \pi (r^2 + 2r dr + dr^2) (L + dL)$$

$$= \pi r^2 L + \pi r^2 dL + 2\pi r dr L + 2\pi r dr dL$$

$$V' = \pi (r^2 L + r^2 dL + 2r L dr)$$

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi (r^2 dL + 2r L dr)}{\pi r^2 L} = \frac{V' - V_i}{V_i}$$

$$\theta = \frac{r dL + 2L dr}{r L} = \text{trace } \bar{\epsilon}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{L}{2L} \text{trace } \bar{\epsilon} - \frac{dL}{2L}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{\text{trace } \bar{\epsilon}}{2} - \frac{dL}{2L}, \quad \epsilon_{33} = \frac{dL}{L}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2}, \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_r$$

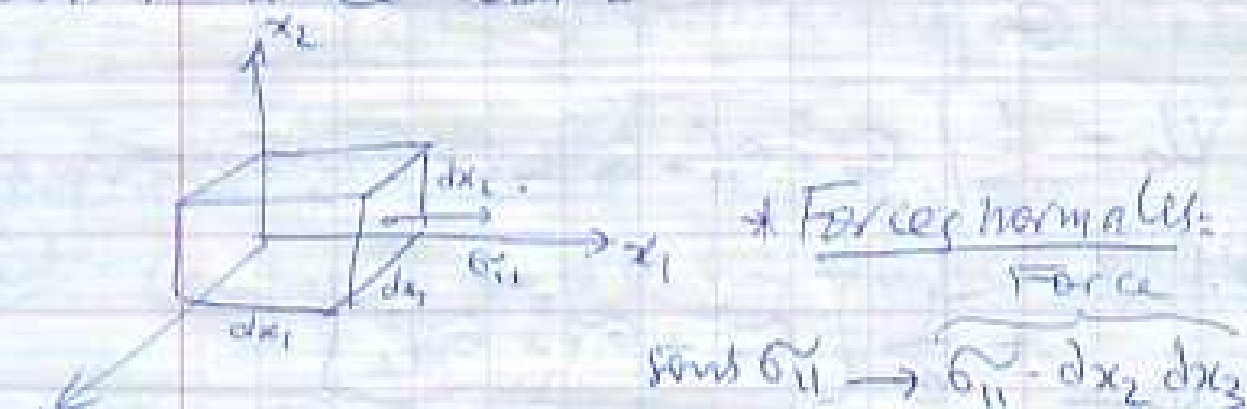
$$\frac{dr}{r} = \epsilon_r$$

$$\begin{cases} dr_1 = r \, \varepsilon_{r1} \\ dr_2 = r \, \varepsilon_{r2} \end{cases}$$

Date: 21/02/2010

Energie potentielle de  
déformation :

Pour l'état général de  $\sigma$ , l'Ep accumulée  
ds un V élémentaire est dé't par la somme des  
travaux des forces réparties sur la surface  
délimitant ce volume



Le travail:  $\left( \frac{1}{2} \right) \sigma_{11} dx_2 dx_3 \cdot \underbrace{\varepsilon_{11} dx_1}_{\Delta l_1}$   
 dynamique  $\leftarrow$   $\hookrightarrow$  quasi statique.  
 part de  $1/2$ .

$$\left( W = \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ii} \cdot \sigma_{ii} dx_1 dx_2 dx_3$$

\* Forces tangentielles

$$\frac{1}{2} \sigma_{12} dx_2 dx_3 \cdot \varepsilon_{12} dx_1$$



$$\Rightarrow \left\{ W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx_1 dx_2 dx_3 \right\}$$



### Energie interne:

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i+j} (\sigma_{ii} \epsilon_{ii} + \sigma_{ij} \epsilon_{ij}) dV$$

CLAPEÏRON *f* unité de volume.

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum (G_{ii} \cdot \epsilon_{ii} + \epsilon_{ij} G_{ij}) \quad \underline{\text{energie}}$$

$$\sum \varepsilon_{ij} = \frac{1}{n} \left( \sigma_{ii} - 2(\sigma_{jj} + \sigma_{kk}) \right)$$

$$\left\{ \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G} \right.$$

$$U = \int U_0 dV$$

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) \right] + \frac{1}{G} \left[ \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \right]$$

en axe  $g/g$

Rem: l'Ep interne se compose en fait de 3 E =

- 1- Énergie de variation de forme.
- 2- " " " " volume.
- 3- " " " " position.

$$U_{\varepsilon} = U_{0V} + U_{0F} + U_{0p} \rightarrow 0$$

petites  
perturbations

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

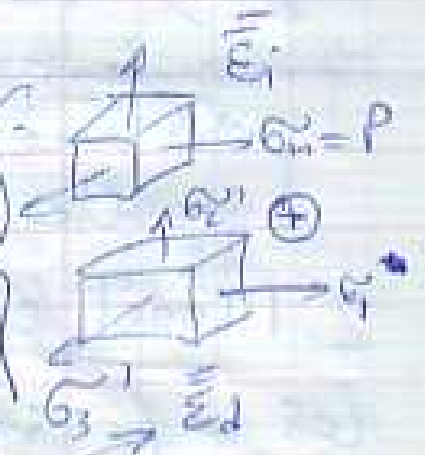
$$f(\bar{\varepsilon}_i) \qquad f(\bar{\varepsilon}_d)$$

Groupe principal :

$\bar{\varepsilon}_i$  : extension multiaxiale

$$U_{0V} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$U_{0F} = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$



Cas particuliers de déf :

1<sup>er</sup> cas : Compression ou extension uniforme unilatérale

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad U_{0F} = 0$$

$$U_{0V} = \frac{1-2\nu}{6E} (3\sigma)^2 = \frac{9(1-2\nu)}{6E} \sigma^2$$

2<sup>nd</sup> cas : Glissement simple :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \quad U_{0V} = 0$$

$$U_{0F} = \frac{3(1+\nu)}{6E} \sigma^2$$

# Modèles mathématiques de Matériaux

soumis à de petites déformations uniaxiales :

## 1. Modèle élastique linéaire :

à l'exception du béton les MDC présentent un diag  $\sigma$ - $\epsilon$  débutant par une partie linéaire appelée droite de Hooke.



## 2. Modèle élastique non linéaire :

Les déformations sont réversibles, mais ne sont plus liées aux  $\sigma$ .



BULFINGER :  $\sigma = A \epsilon^k$

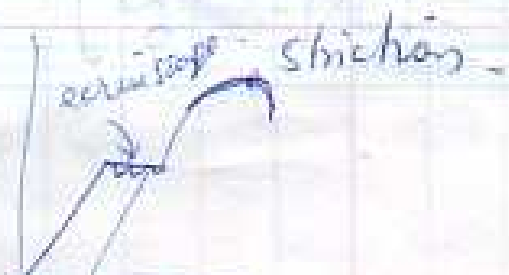
course approx générale :  $\sigma = \sum_{i=1}^n A_i \epsilon^{k_i}$

## 3. Modèle élastique parfaitement plastique

Ce modèle sert souvent à idéaliser les Mat.

[Acier laminé (palier d'écrasage)]

E failles pour ne pas atteindre la zone d'écrasage.



- Dans la zone élastique linéaire la contrainte latérale est caractérisée par  $\nu = \text{cte}$ ,
- Dans la zone plastique on admet que le volume de la matière se conserve.

#### 4. Modèle élasto plastique à Ecrouissage linéaire

$E_t$ : Module élastique tangent.

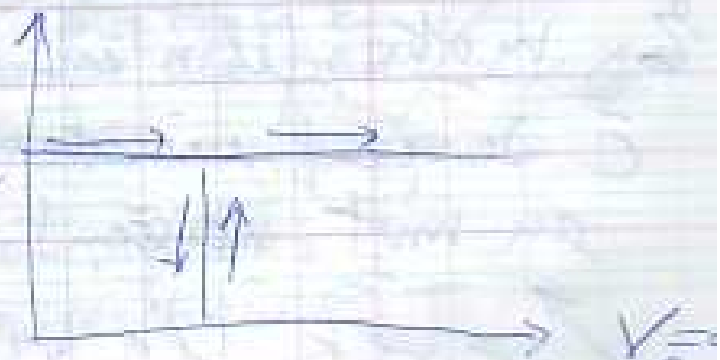


Pour les matériaux ne présentant pas un palier d'écrantage bien marqué, on a parfois recours à ce modèle là, pour lequel  $\sigma_{el}$  et  $\nu$  sont dét. expérimentalement.

Ds ce modèle la limite élastique peut être dépassée et ds la zone plastique, la déformation n'est plus à déterminer.

#### 5. Modèle régi de Plastique

Pour des déf. plastiques les déf. élastiques sont trop faibles, ce modèle est déduit du 3<sup>ème</sup> modèle en faisant tendre  $E \rightarrow \infty$ .



Les déf. purement plastiques ont lieu à volume cte.

## 6. Modèle linéaire visqueux:

C'est l'idéalisation la plus simple de déf  
dépendante du temps qui consiste à  
supposer que la vitesse de déf est  $\propto \dot{\epsilon}$

$$\text{Newton: } \underline{\sigma} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coeff de viscosité}}}{\eta} \dot{\underline{\epsilon}} \rightarrow \underline{\epsilon} = \frac{\underline{\sigma}}{\eta} t + \underline{\epsilon}_0$$

Un tel milieu se comporte plutôt en fluide  
qu'en solide, si petite que soit la  $\underline{\sigma}$   
elle produirait qui ne peut cesser d'↑  
que si  $\underline{\sigma} = 0$ , de ce cas elle gardera  
la valeur acquise

## Relations de NAVIER pour les fluides visqueux:

Un fluide est un milieu continu où à l'état  
de repos, le  $\underline{\bar{\epsilon}}$  est sphérique

coupe hydrostatique:  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$

En mouvement, il n'en est plus ainsi

$\underline{\bar{\epsilon}}$  devient anisotrope, des  $\underline{\epsilon}$  de résistance  
au mouvement naissent et dont la grandeur  
↑ avec la vitesse du mouvement.



tant que la vitesse est assez lente pour que l'écoulement soit régulier, c-à-d que les fillets liquides glissent les uns sur les autres sans turbulence d'ordonnée  $\Rightarrow$  pertes d'E  
 On peut admettre avec NAVIER que les composantes de  $\vec{\tau}$  au glissement, c-à-d de l'écart de  $\vec{C}$  / à la comp la stagnation.

$\sigma_{ij} + p \delta_{ij}$  sont fct linéaire et homogène de celles du tenseur vitesse de déf  $\vec{\bar{E}}$ .

Des considérations formellement identiques à celles qui ont conduit à la relation de LAMÉ  $\rightarrow$  mettre ces relations sous la forme condensées suivantes:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \bar{E}_{ij}.$$

NAVIER :

$$\boxed{\sigma_{ij} + p \delta_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \bar{E}_{ij}}.$$

$\lambda, \mu$  caractéristiques de viscosité.

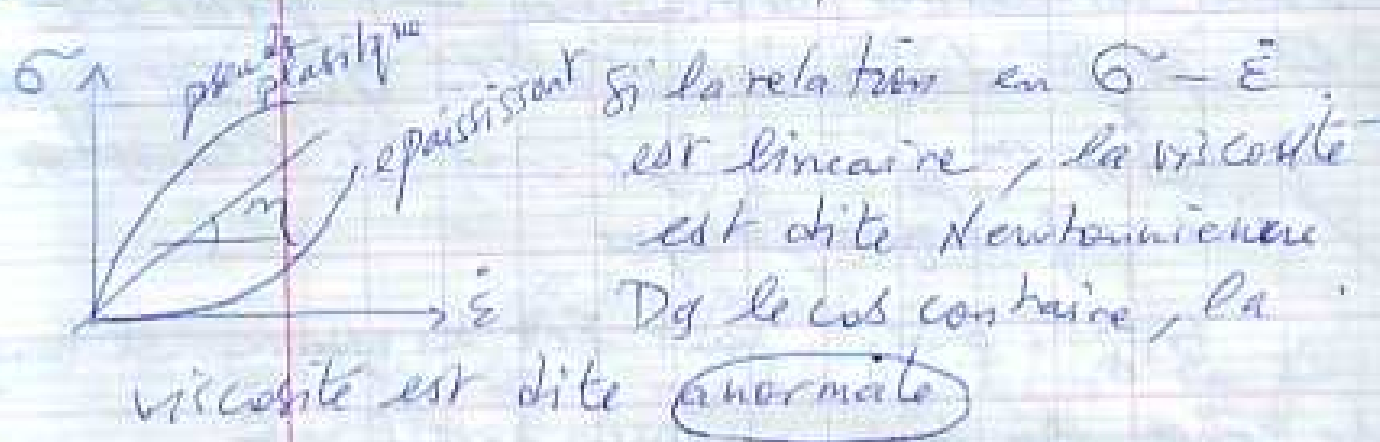
On introduit ainsi une inconnue de plus / aux cas des solides ( $p$  : pression au repos).

De ce cas à un fluide compressible :

$p$  est liée à masse spécifique  $\rho$ ,  $T$  par l'état d'équilibre.

fluide incompressible :

l'éq d'état se réduit à  $\rho = \text{cte}$   
on introduit alors l'éq de continuité.



Rem: Les solides présentent de la  $\eta$   
pas Newtonienne et jamais pure, car  
élasticité et plasticité sont les caractéristiques  
essentiels d'un solide.

# Chap 5: Rheologie

21/02/2010

## Notions de base :

1. Def : C'est une branche de la physique qui étudie l'écoulement ou les déf des corps sous l'effet des  $\sigma$  qu'il leur sont appliquées compte tenu de leur vitesses ou plus généralement de leur variations en fonction du temps, c'est une des bases de la MMC dont l'objet essentiel est de déter champ de  $\vec{\epsilon}$  et champ de vect dép elle ne s'est développée que tardivement car les relations étaient  $\sigma - \epsilon$  plus, le solide élastique de Hooke, le fluide visqueux de Newton sur lesquels ont été basés la théorie de l'élasticité et la mécanique des fluides :

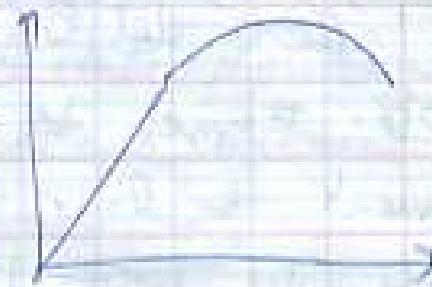
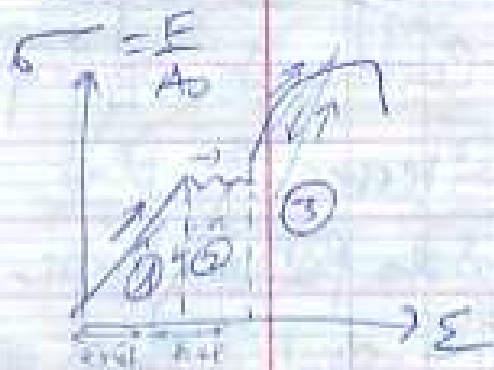
(Rheologie) étudie 1928, elle comporte 3 sortes d'études, courant d'étude :

1. Expérimentale : c'est la déter par des essais des relations de comportement.
2. Structurales : L'explication des relations observées à partir de la structure des matières.
3. théorique : Etude des diverses formes possibles pour ces relations de pt de vue macroscopique i.e. indépendant de la structure.

## 2 Comportement des Solides:

### Diversité de Cpls:

#### 2.1 Métaux à T ambiante cpts traction



① Linéarité  
réversibilité.  $\epsilon = \epsilon_{el}$

② Irréversibilité partielle.

→ def résiduelles.

$$\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{pl}$$

écrouissage  $\nearrow \sigma_{el}$

③ striction:

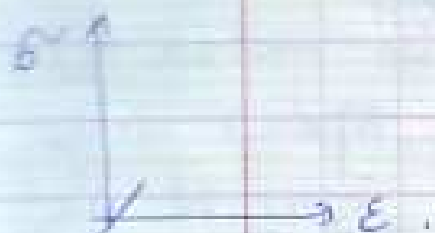
Irréversibilité totale.

$$\epsilon = \epsilon_{pl}$$

L'apparition de la striction qui est une instabilité géométrique qui conduit à la localisation de la déformation, la  $\sigma$  jusqu'à rupture, en fait il s'agit de  $\sigma_{apparente}$  ramenée à la surface initiale, la  $\sigma_{réelle}$  ramenée à la surface réelle de striction continue à  $\nearrow$  ( $A_0$ )

la sol n'est plus homogène

Matériaux fragiles:



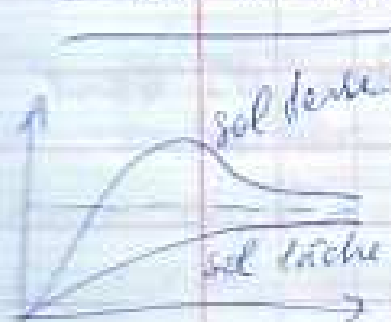
pour les métaux on a

un comportement symétrique en compression mais sans striction pour certains Mat fragiles, béton, écouillage

fonte, la roche → en compression simple, un comportement ductile, en traction simple, un cpt fragile conduisant à une rupture rapide.

La courbe de traction permet également de décrire le cpt d'autres matériaux tels caoutchouc ou les sols.

Essai triaxial:



$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

à  $\sigma_2 = \text{cte}$ .

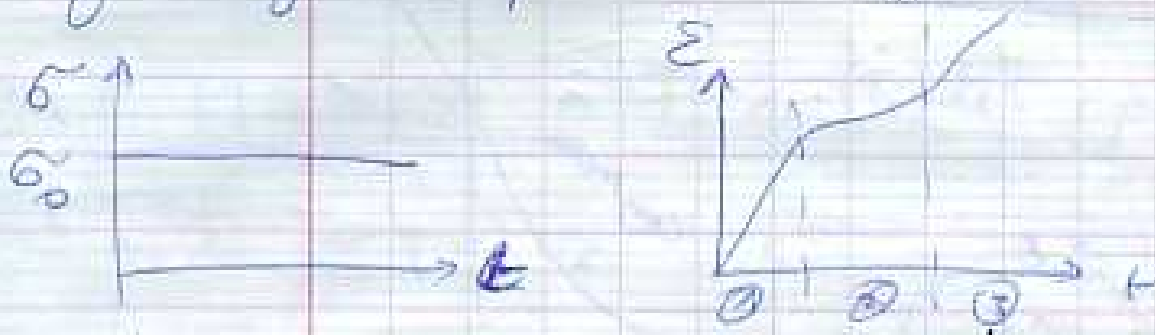
sol + tasse.





## 2-2 Essai de fluage:

fluage simple ou étagé



après le fluage (1) transitoire

(2) stabilisé

une zone de fluage (3) à l'endommagement  
la détérioration du milieu conduisant à sa rupture

## 2-3 Relaxation: $\epsilon = \text{cte} \rightarrow \sigma$



Ces deux cpts dépendant du temps sont  
appelés visco plasticité  
ou "élasticité".

# Modèles rhéologiques:

28/02/2010

## 3.1 Généralités:

La notion de solide a d'abord été celle d'un corps indéformable qui se brise si on le soumet à une sollicitation trop grande. Solide d'Euclide à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle.

Hooke mis en évidence que les solides se déforment, de ce fait les mécaniques introduisant  $E$ ,  $G$  établis une théorie complète des déformations élastiques faibles d'une pièce déterminée sans contraintes. Considérant les milieux fluides (liquides).

Pascal a défini un liquide parfait incompressible qui se déforme sans résistance autre que son inertie sous l'action de la  $\tau$  la plus faible.

En réalité, selon Newton chaque filet ou "feuille" liquide se déplace à tendance à entraîner les voisins proportionnellement à leur différence de vitesse (viscosité Newtonienne). Plus tard, Maxwell a relié ce coeff à une élasticité instantanée, disparaissant par rapport à la vitesse de cisaillement.

Confrontation de facteurs  $\sigma/\epsilon$ , temps donna  
le système de néologie 1928 d'un couple  
de physiciens E.C BINGHAM.

### 2.3 Modèles Elementaires :

Il est important de savoir construire des  
modèles mathématiques de comportement  
descriptant au moins qualitativement les  
diff types de comportement, ces modèles  
s'obtiennent par combinaisons de Modèles  
Élémentaires, ces // s'obtiennent soit  
par montage // ou en série  
fct de l'analogie :

Excitation  $\rightarrow$  Réponse

$\sigma$

$\epsilon$

Éléments  $I$

$H_p(U)$

Montage en Série

$I = \sigma_i$

$G = \epsilon_i$

$U = \sum \sigma_i$

$\epsilon = \sum \epsilon_i$

### 3.2.1 le ressort : (élastique linéaire)



loi de Hooke  $\sigma = E \varepsilon$ .

$E$  : caractéristique rhéologique

### 3.2.2 le patin : (M. cpt plastique)



$\sigma_{seuil} = \sigma_{critique}$ .

### 3.2.3 l'amortisseur : (M. cpt visqueux)

viscosité Newtonienne :  $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$



↓  
caractéristique  
rhéologique

viscosité Non Newtonienne :

$$\sigma = \eta_p \dot{\varepsilon}^{1/n}$$

### 3.2.4 Butée : $\rightarrow \varepsilon_s = \varepsilon_{cr}$

Butée simple :  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_{cr}$

Butée double :  $-\varepsilon_{cr} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr}$



### 3.2.5 Régulateur : vitesse de déf.

$$\dot{\epsilon}_s \leq \dot{\epsilon}_{cr}$$

$$0 \rightarrow$$

Rem : Ressort et amortisseur sont des éléments linéaires ( $\propto$  entre  $\sigma/E$  ou  $\sigma/\dot{\epsilon}$ ), les paramètres des éléments linéaires sont inclus dans eqs rhéologiques.

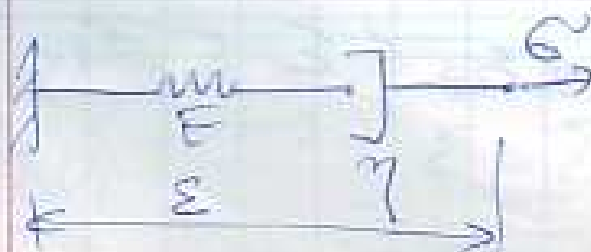
- les paramètres des autres éléments à savoir  $\sigma_{cr}$ ,  $\dot{\epsilon}_c$ ,  $\dot{\epsilon}_{cr}$  apparaissent plutôt comme des limites d'application des  $\pm$  eqs.

### 3.3 Modèles de bases.

#### 3.3.1 comportement visco élastique.

combinaison A-R :  
amortisseur A      ressort R

i/ Série : A-R  $\longrightarrow$  modèle de Maxwell





Ex 2' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E \varepsilon_1 = \eta \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \\ = \frac{\dot{\sigma}_1}{E} + \frac{\sigma_2}{\eta} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}} \quad (*) \quad \text{Ex 2' diff } (\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dots)$$

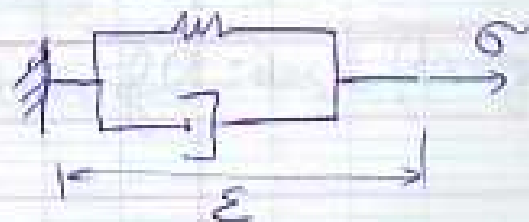
Connaissant l'histoire de  $\sigma$  ou de  $\varepsilon$  ou par  $\varepsilon$  ou de  $\sigma$  en déduire la valeur à l'instant  $t$  de  $\varepsilon$  ou de  $\sigma$  par intégration de (\*).

Le liquide de Maxwell présente une élasticité  $E$  instantanée et viscosité permanente  $\eta$ .

Date 07/03/2010

Ex 2' Parallèle : Modèle de Kelvin-Voigt :

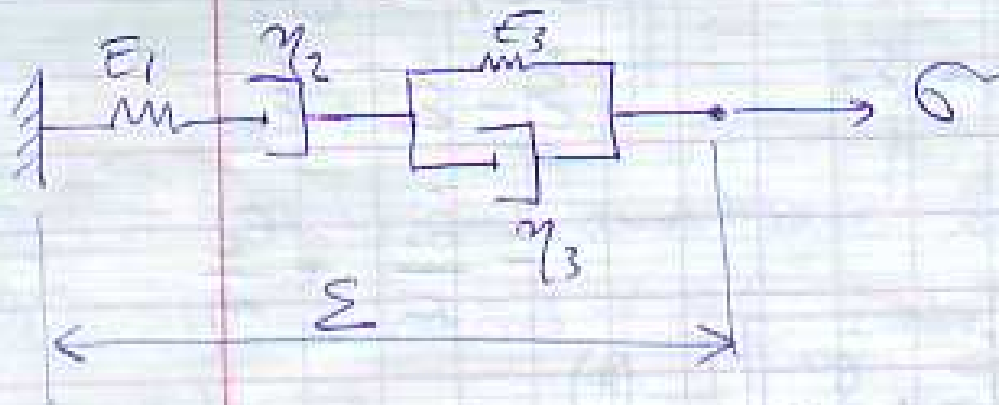
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = E \varepsilon_1 = E \varepsilon \\ \sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon}_2 = \eta \dot{\varepsilon} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}}$$

iii) Montage mixte: Maxwell - Kelvin  
BURGERS



$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3^E + \sigma_3^\eta$$

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$$

$$\text{avec } \Sigma_3 = \Sigma_3^E = \Sigma_3^\eta$$

$$\sigma_1 = E_1 \dot{\Sigma}_1, \quad \sigma_2 = \eta_2 \dot{\Sigma}_2, \quad \sigma_3^E = E_3 \dot{\Sigma}_3^E = E_3 \dot{\Sigma}_3$$

$$\sigma_3^\eta = \eta_3 \dot{\Sigma}_3^\eta = \eta_3 \dot{\Sigma}_3$$

$$\ddot{\Sigma} + \frac{E_3}{\eta_3} \dot{\Sigma} = \frac{1}{E_1} \ddot{\sigma} + \left( \frac{E_3}{\eta_3 E_2} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} \right) \dot{\sigma} + \frac{E_3}{\eta_3 \eta_2} \sigma$$

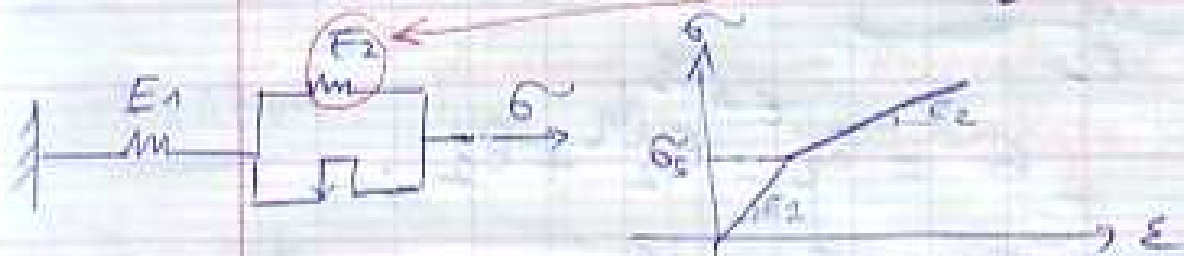
3.3.2 comportement élasto-plastique - plastique - patin.  
 ressort  $\leftarrow$   $\rightarrow$  patin.

1/ En série: Ressort + Patin

$\rightarrow$  modèle élasto-plastique sans écoulement.



$\rightarrow$  modèle avec écoulement linéaire.

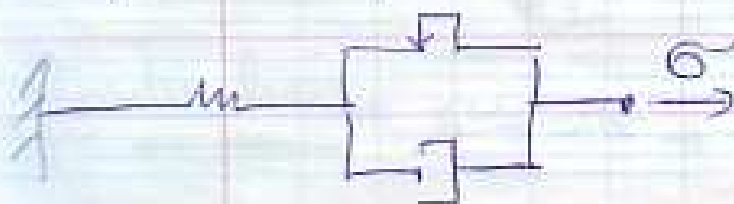


On peut obtenir des cpts visco-plastiques par combinaison des 3 éléments de base :

- Ressort
- Amortisseur
- Patin.

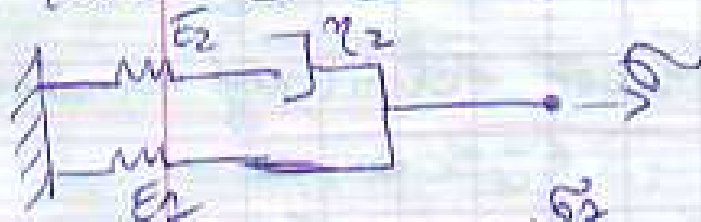
ex:

\* Modèle de BINGHAM: permet de décrire le cpt de goudron et certains fluides de forage.



## Application:

1. Etablir l'éq diff gouvernante pour le modèle à 3 paramètres
2. Résoudre cette éq pour l'effet d'une déflexion unitaire appliquée à l'instant  $t$  maintenue constante à cette valeur.
- quel est le phénomène physique qui est testé de décrire à travers ce modèle.



$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_2^E + \tilde{\sigma}_2^\eta$$

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{\varepsilon}_1$$

$$\text{avec } \varepsilon_2 = \varepsilon_2^E + \varepsilon_2^\eta$$

$$\tilde{\sigma}_2^E = E_2 \tilde{\varepsilon}_2^E, \quad \tilde{\sigma}_2^\eta = \eta_2 \dot{\tilde{\varepsilon}}_2^\eta$$

$$\tilde{\sigma}_1 = E_1 \tilde{\varepsilon}_1$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - E_1 \varepsilon}{E_2} + \frac{\sigma - E_1 \varepsilon}{\eta_2}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \dot{\varepsilon} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon \end{aligned} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - E_1 \varepsilon}{E_2} + \frac{\sigma - E_1 \varepsilon}{\eta_2}$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon} \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) + \frac{E_1}{\eta_2} \varepsilon = \frac{\sigma}{E_2} + \frac{\sigma}{\eta_2}}$$

est diff.

2/

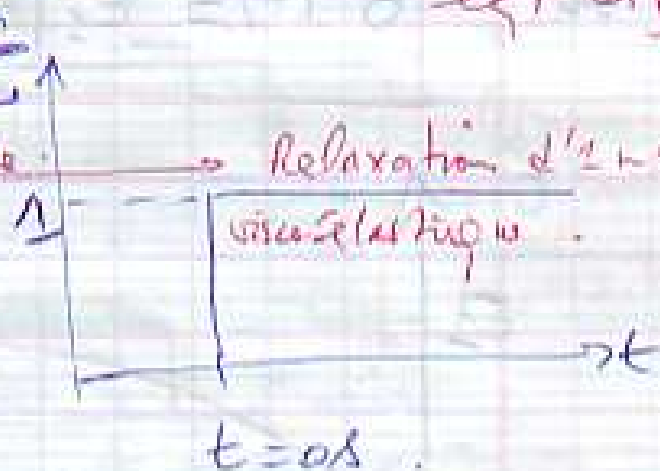
Relaxation.

phénomène

Relaxation d'un modèle

viscoélastique

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 e^{-t/\tau} \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$



$$\frac{E_1 \varepsilon}{\eta_2} = \frac{\sigma}{E_2} + \frac{\sigma}{\eta_2}$$

$$\sigma(t) = \sigma_{\text{homogène}}(t) + \sigma_{\text{particulière}}(t)$$

Homogène :  $\frac{\dot{\sigma}}{E_2} = -\frac{\sigma}{\eta_2} \Rightarrow \boxed{\sigma(t) = K e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t}}$

particulière :  $\sigma = \varepsilon E_1 \Rightarrow \dot{\sigma} = 0 \Rightarrow$

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon \rightarrow \sigma_p = E_1$$

Unitaire 1



$$\tilde{\sigma}(t) = E_1 + K e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t}$$

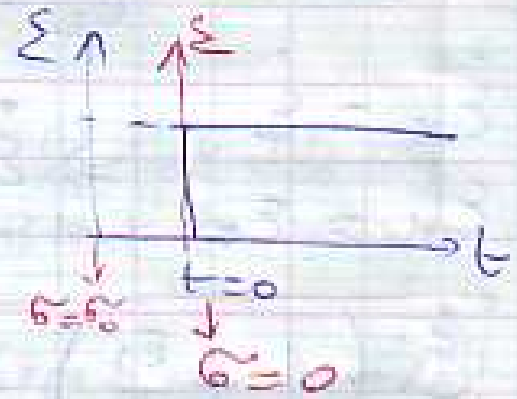
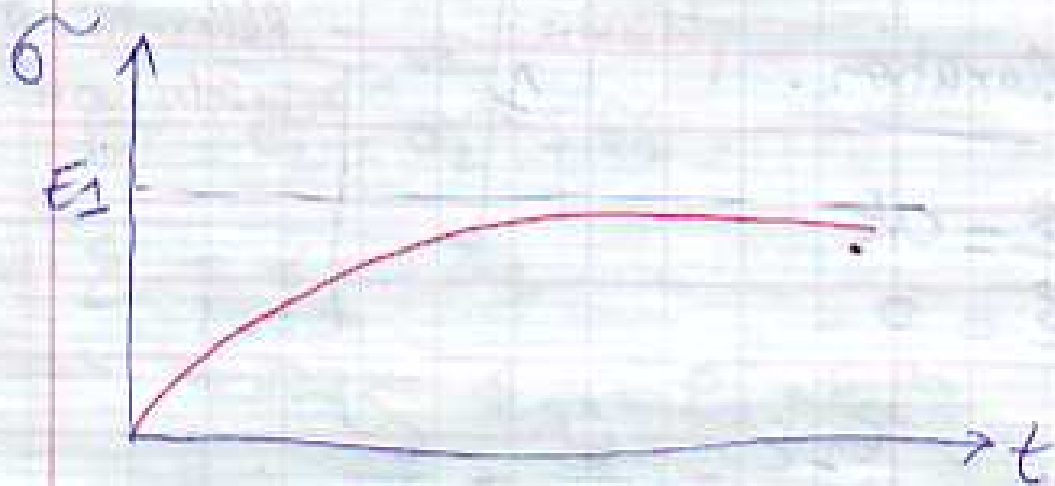
$$\text{à } t=0 \rightarrow \tilde{\sigma}=0$$

$$\Rightarrow E_1 + K = 0$$

$$\Rightarrow K = -E_1$$

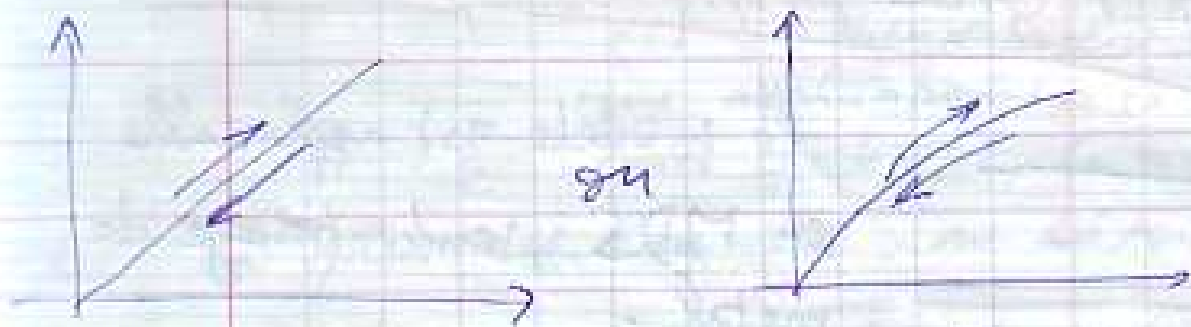
d'où

$$\tilde{\sigma}(t) = E_1 \left( 1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t} \right)$$

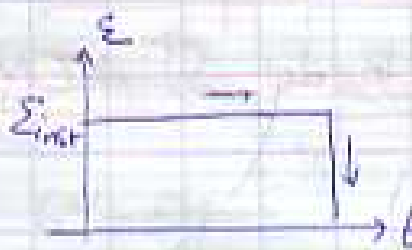
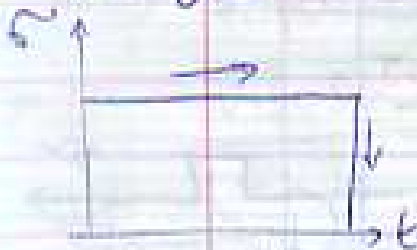


## Description des $\pm$ ls cpts :

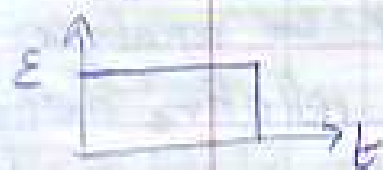
### 4.1 Solide élastique parfaitement élastique :



+ fluage :



+ Relaxation :



Phénomènes  
instantanés  
et  
réversibles.

Ce modèle est applicable aux métaux, roches, béton, sous des sollicitations inférieures à la limite élastique.

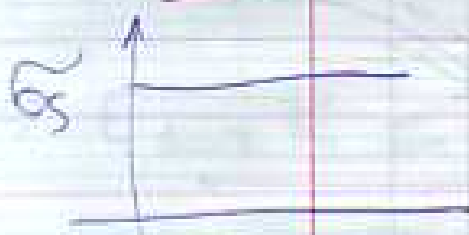
### ~~4.2~~ Solide visco-élastique :



Ce modèle est applicable aux polymères, caoutchouc, bois, lorsque les sollicitations sont faibles.

## 4.2 Solide plastique :

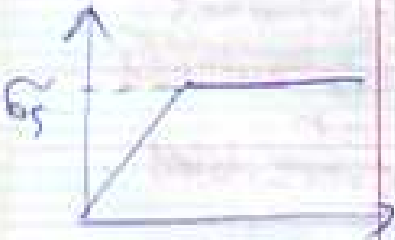
### a) rigide parfaitement plastique :



Ce modèle est applicable en MDS, emboutissage de métal.

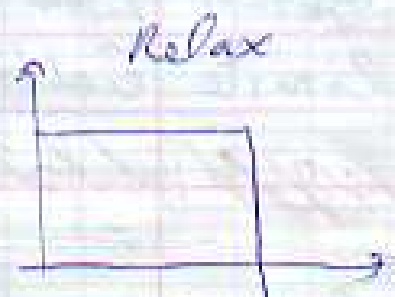
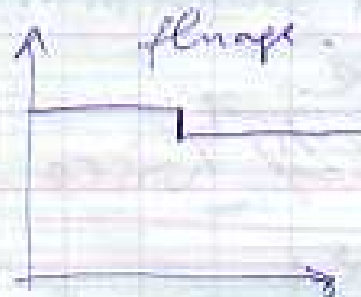
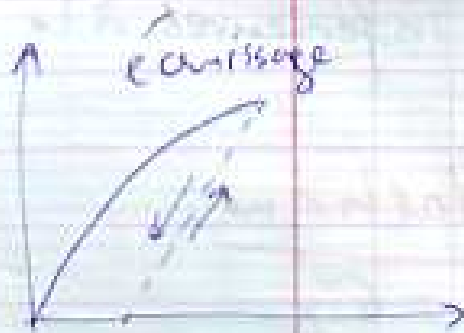
### b) élastique parfaitement plastique :

Modèle de St. VENANT :



Ce modèle est applicable pour les aciers et en analyse limite pour les mat relatifs élastiques.

### c) élasto-plastique avec écrouissage :



Ce modèle est app aux métaux, alliages.

qd leur  $T_0 \text{ relte} < T_{\text{fusion}}/4$


### 4.3 fluide visqueux:

$\sigma_1$



d'autant plus le fluide est visqueux, plus on a une atténuation de la déf au cours du temps, le modèle est app, en plus des liquides, au béton frais métaux, alliages à  $T_{\text{fusion}}$ , bitumes à  $T_{\text{écoulement}}$ .

### 4.4 visco - parfaitement plastique:

  $\sigma = \eta \dot{\epsilon}^{1/n}$  (modèle Norton)

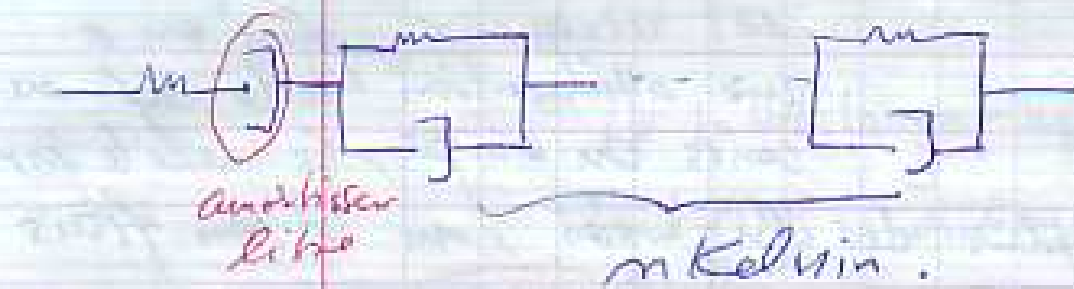
app aux métaux, alliages lorsque  $T > T_{\text{fusion}}$ .

Rem: le principe de superposition BOLTZMAN s'applique aux modèles linéaires mais pas, aux non-linéaires tq: patins, bontée ou régulateur. L'expérience ne devrait pas chercher à représenter l'unicité avec ressort et amortisseur les prop d'un corps.

le modèle généralisé de Kelvin s'obtient en associant en série: ressort + n. modèles. Kelvin



## Maxwell généralisé:

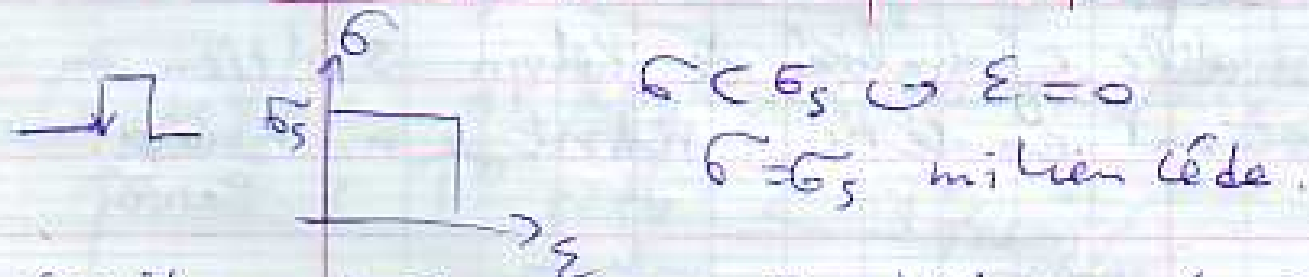


C'est donc le cas le plus général du corps linéaire.

Conclusion: En groupant d'une façon quelconque des modèles linéaires  $\rightarrow$  modèle linéaire lui-même. Un groupement quelconque de ressort et  $\dashv$  amortisseur compliqué soit-il est équivalent d'un point de vue au modèle Kelvin généralisé, et d'autre part à Maxwell généralisé.

## 5. Modèles non linéaires:

### 5.1 Solide parfaitement plastique inélastique



$$\sigma < \sigma_s \rightarrow \epsilon = 0$$

$\sigma = \sigma_s$  milieu cède.

Si l'on fait varier la déf, entre 2 valeurs extrêmes  $\pm \epsilon_c$





## 5.2 Solide de BINGHAM:

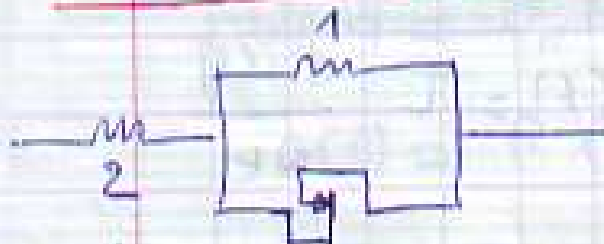
Modèle plasto-viscoélastique  $\rightarrow$  parfait tenue élastique.

Si  $\sigma > \sigma_c$ , l'a  $\sigma$  comporte 2 termes:

- le 1<sup>er</sup> terme est en 1.1 correspondant au frottement solide.
- le 2<sup>nd</sup> correspond à un écoulement Newtonien



## 5.3 Action des butées:



Lorsqu'on exerce une traction par exemple, le ressort 2 cesse de travailler dès que la def a atteint la def seuil.

## 6. Analogie électrique:

Les montages mécaniques sont longs à réaliser et assez coûteux (la viscosité de l'huile varie bcp avec  $T_0$ ), modifier la section des pistons ou, changer le ressort)

Par conséquent, il est bcp plus easy de faire un montage électrique des paramètres peuvent être changés rapidement, et la réponse peut être instantanée, cette analogie est une analogie formelle entre les lois électriques et l'.

### 6-1 éléments analogiques:



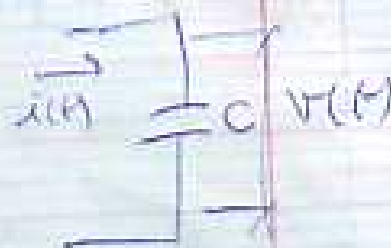
$$v(t) = R i(t)$$



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

p.e.m.

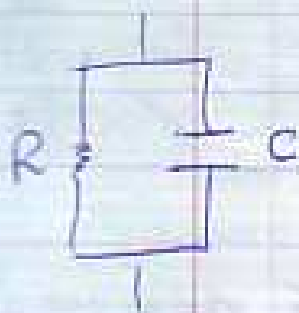
$$q(t) = C \cdot v(t)$$



$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$\dot{\Sigma} = \frac{\dot{Q}}{E} + \frac{\dot{Q}}{R}$$



$$i(t) = i_C(t) + i_R(t) \\ = C \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R}$$

$$\begin{array}{l|l} \dot{\Sigma} = i(t) & \frac{1}{E} \hookrightarrow C \\ \dot{Q} = u(t) & \frac{1}{R} \hookrightarrow R \end{array}$$



$$u(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\begin{array}{l|l} \dot{\Sigma} \hookrightarrow u(t) & \frac{1}{E} \hookrightarrow L \\ \dot{Q} \hookrightarrow i(t) & \frac{1}{R} \hookrightarrow R \end{array}$$

7 - Compt. des fluïdes:

7.1 Régime d'écoulement:

→ Régime permanent:

a) Régime laminaire. 

b) " turbulent. 

c) " embourchant



\* Régime transitoire:

est non établie suite aux modifications d'églt.

## 7-2 Caractéristiques rhéologiques:

$T_0$ ,  $P$  données:

a) En régime transitoire:

la C. rhéologique est représentée par le temps de réponse aux modifications d'églt.

b) En régime permanent: caractérisé par la courbe d'écoulement ou le néogramme.

Les coeff.  $\sigma$  et  $\epsilon$  de l'églt d'écgt. représentant cette courbe sont appelées paramètres rhéologiques caractéristiques du fluide, telles

la  tangentielle  $\sigma$  à  $\epsilon$

c/ Au repos :  $\rightarrow$  milieux thixotropes.

Il est représenté par le développement d'un gel en fonct du temps, un fluide est

thixotrope si :

- L'essai au repos après d'agitation  $\xrightarrow{\text{traçage}}$  gel
- Retrouve son état initial après une nouvelle agitation.

La thixotropie est un phénomène réversible à T et P ctes.



# Eqs générales d'élasticité chap 6

Date: 14/03/2010

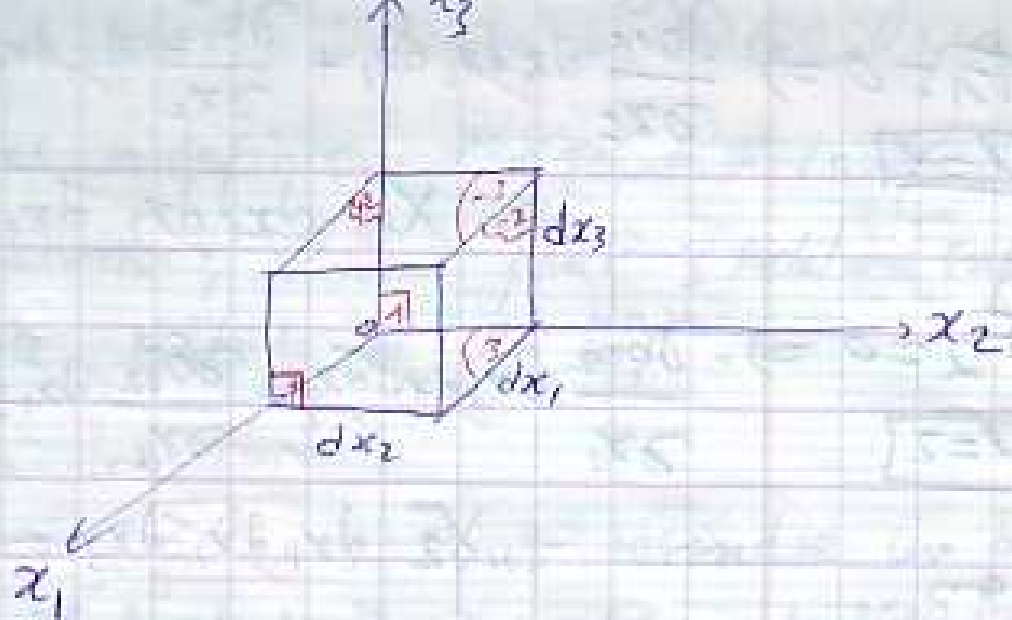
1/ Intro: Tout les matériaux possèdent à un certain degré la propriété d'être élastique c-à-d si les  $F_{ext}$  qui provoquent la déf d'un corps ne dépasse pas une certaine limite, la déf disparaîtra au même temps que les forces qu'il lui donnent naissance, pour l'établir des lois mathématiques de la théorie d'Elasticité on supposera que les solides sont homogènes isotropes à l'état neutre, c-à-d que les prop physiques et mécaniques sont les m<sup>^</sup> en chaque point et ds toutes les directions.

la théorie d'élasticité consiste à formuler 3 types d'eqs :

- 1- les eqs diff d' $\leq$
- 2- les eqs diff déformation - déplacement
- 3- les lois intrinsèques du matériau.

2/ Eqs d' $\leq$  indéfini:

Ce sont des relations entre les  $\sigma$  et  $\epsilon$  se produisant en pt  $\forall$  en milieu <sup>(dérivées)</sup> élastique.



Le cube est situé ds un milieu élastique-  
isotrope - homogène, est soumis à des forces  
massiques  $\vec{X} = [\vec{X}] = [\vec{F}][L]^{-3}$  et des forces  
superficielles sur les surfaces  $\propto \tilde{\sigma}_{ij}$   
(proportionnel)

$$\vec{F} = (\tilde{\sigma}_{ij})$$

Il s'agit de l'élément: *seul les Forces superficielles*

Face 1:  $\tilde{\sigma}_{1j} dx_2 dx_3$

Face -1:  $\left( \tilde{\sigma}_{1j} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{1j}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3$

Sur la face "i":  $\tilde{\sigma}_{il} dx_j dx_k$

Sur la face "-i":  $\left( \tilde{\sigma}_{il} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{il}}{\partial x_i} dx_i \right) dx_j dx_k$

Sur les  $\vec{F}_v$ :  $\vec{X} dx_1 dx_2 dx_3$

$$\sum_{l=1} F_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{b}_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \tilde{b}_{21}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \tilde{b}_{31}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$$\sum_{l=2} F_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{b}_{12}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \tilde{b}_{22}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \tilde{b}_{32}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 + X_2 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{b}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{b}_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{b}_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{b}_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{b}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{b}_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{b}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{b}_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{b}_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{b}_{12} = \tilde{b}_{21}, \tilde{b}_{23} = \tilde{b}_{32}, \tilde{b}_{13} = \tilde{b}_{31}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{b}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{b}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{b}_{13}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{b}_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{b}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{b}_{23}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{b}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{b}_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{b}_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{C} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} + \vec{X} = \vec{0}$$

Rem: Ds 1 pb de détermination de  $\vec{u}$  il y a 6 paramètres à définir, l'égt d'≡ indéfini donne 3 relations, il nous faut 3 relations supp qui nécessite l'étude de la déf.

### 3/Résolution des Pbs:

3-1 Pbs réguliers: Pour résoudre un pb d'élasticité il faut trouver un champ de déplacement

$$\vec{U} = U_i(\vec{x}, t), \quad \bar{C} = \bar{C}_{ij}(\vec{x}, t).$$

Vérifiant les éqts du mvt on d'≡ suivant qu'on s'intéresse au pb dynamique ou quasi statique.

$$\rightarrow \bar{C}_{ji,j} + X_i = \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} & (\text{dynamique}) \\ 0 & (\text{quasi statique}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \bar{C}_{ij} = d_{ijkl} E_{kl} \quad (\text{loi intrinsèque})$$

$$\rightarrow E_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ 3 U_i, 6 \bar{C}_{ij} \end{matrix}$$

on obtiendra un syst de 9 éqts à 9 inconnues  
(3 éqts d'≡ + 6 éqts  $E_{ij}; U_{ij}$ )

le pb sera bien posé et admettra une solution unique en lui rajoutant des C.A.L et éventuel<sup>≡</sup> des

C.I <sub>(t=0)</sub> adéquat.

Les méthodes de résolution du pb ainsi formulé sont de 2 types :

M.A — analytique  $\rightarrow \begin{pmatrix} \bar{E}(2D) \\ \bar{C}(2D) \end{pmatrix}$

M.N — numérique :

- METHODE des él<sup>ts</sup> finis **MEF**
- " différences finis MDF
- Théorie des équivalences.

Les méthodes numériques

La méthode analytique n'est applicable qu'aux pbs simples, et c'est de cet objectif, il est préférable d'utiliser des méthodes numériques, qui sont + pratiques, en cas où on possède un calculateur numérique, la + utilisée qui a donné des résultats satisfaisant en concordance avec les résultats des M.A (M. exactes) est la **MEF**

des conclusions ont été tirées de la convergence en fon<sup>ct</sup> du N<sup>br</sup> de ddl des modèles pour  $\neq$  types d'éléments, la 1<sup>ère</sup> conclusion est : les élément quadrilatéraux donnent de meilleur résultat que les triangles.  
Pour un m<sup>me</sup> n<sup>br</sup> de ddl les élément à champ quadratique ont une précision meilleur.



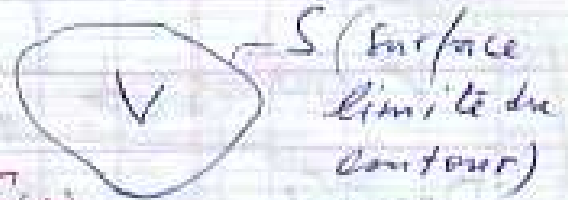
que ceux à champ linéaire.

### 3-2 Pbs Généraux:

3 types de pbs peuvent :

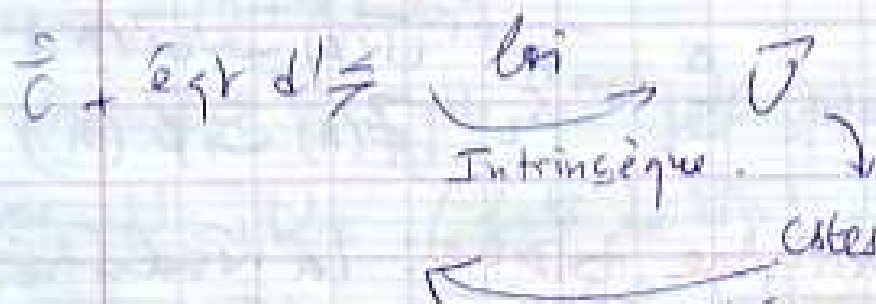
#### a - Pbs de type I :

Données :  $\vec{X}(M) \forall M \in V$   
 $\vec{U}(A) \forall A \in S \rightarrow \vec{\phi}(A)$



Inconnues :  $\vec{C}(M)$  et  $\vec{U}(M)$  qui doivent vérifier  
les éq d'eq et les con CAL, exprimant  
la continuité de  $\vec{U}(M)$  à la frontière.

$$M \rightarrow A \Rightarrow \vec{U}(M) \rightarrow \vec{U}(A).$$



Une fois le pb est résolu, on détermine les Forces  
de liaison ( $\vec{F}_{\text{supplémentaires}}$ ) qui sont appliquées en chaque  
pt de  $S$  pour réaliser le déplacement  $\vec{U}(A)$ .

#### b - Pbs de Type II :

Données :  $\vec{X}(M) \forall M \in V$   
 $\vec{\phi}(A) \forall A \in S$

Inconnues :  
 $\vec{C}(M)$  et  $\vec{U}(M)$ .

Les fcns inconnues doivent satisfaire les Éq générales d'É et les CAL,

$$\underline{CAL}: M \rightarrow A, \quad \bar{\Phi}(M) \rightarrow \bar{\Phi}(A)$$

Vérification par ~~W~~  $\bar{U}(A)$ .

C - Pbs de Type III (Mixte):

Données:  $\bar{X}(M)$

$$\text{sur } S_1 \rightarrow \bar{\Phi}(A), \text{ sur } S_2 \rightarrow \bar{U}(A).$$

$$\begin{array}{ccc} M \rightarrow A & \bar{\Phi}(M) \rightarrow \bar{\Phi}(A) & M \rightarrow A \\ \downarrow V_1 & \downarrow V_2 & \downarrow V_2 \\ S_1 & \text{mixte} & S_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{U}(M) \rightarrow \bar{U}(A) & & \end{array}$$

Vérifier  $\bar{U}(A)$   $\bar{\Phi}(A)$

continuité  $\oplus$  des frontières.

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow A' & \bar{U}(A) \rightarrow \bar{U}(A') \\ S_1 \rightarrow S_2 & \bar{\Phi}(A) \rightarrow \bar{\Phi}(A') \end{array}$$

4 - Elastostatique plane: la résolution des Éq aux  $\frac{\partial^2}{\partial^2}$  des constantes de  $\bar{C}$  en  $\bar{U}$  étant général difficile, ds certains pbs qn on puisse introduire de grandes simplifications.

4-1 Déformation planes: Ds de Nouveaux pbs  
 on peut supposer des déf planes soit un  $\vec{U}$   
 $\vec{U} = (U_1(x_1, x_2); U_2(x_1, x_2); U_3 = 0)$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Cpt élastique}]{\text{loi de}} \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad , \quad \boxed{\varepsilon_{33} = 0}$$

$$E \varepsilon_{11} = (1 - \nu^2) \sigma_{11} - \nu(1 + \nu) \sigma_{22}$$

$$E \varepsilon_{22} = (1 - \nu^2) \sigma_{22} - \nu(1 + \nu) \sigma_{11}$$

$$E \varepsilon_{12} = (1 + \nu) \sigma_{12}$$

Pour résoudre un pb en déf planes il faut  
 trouver  $U_1, U_2$  (fcts de dép) et les fct  $\sigma$   
 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ , en fct des coordonnées  $x_1, x_2$ .

on doit pour cela vérifier les eqs d'eq :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0 \end{cases} \quad X_i = \rho g_i$$

Sol particulière  $\chi_i = 0$

$$\frac{\partial \phi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi_{11}}{\partial x_1} = - \frac{\partial \phi_{12}}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \phi_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi_{22}}{\partial x_2} = - \frac{\partial \phi_{12}}{\partial x_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{11} dx_2 - \phi_{12} dx_1 \\ \phi_{12} dx_1 - \phi_{22} dx_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \varphi(x_1, x_2) \\ \rightarrow \xi(x_1, x_2) \end{array} \text{ sont des diff totales}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \phi_{11} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad ; \quad \phi_{12} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \phi_{12} = \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \quad ; \quad \phi_{22} = - \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \end{array}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \Rightarrow \varphi dx_2 - \xi dx_1 = 0$$

$$\exists \chi(x_1, x_2) \quad \uparrow : \varphi = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}$$

$$\xi = \frac{\partial \chi}{\partial x_1}$$

$$\chi(x_1, x_2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \\ \phi_{12} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \\ \phi_{12} = - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \end{array} \right.$$

cette fct est  
appelée fct de  $\phi$   
Fct d'Airy

la connaissance de cette fct permet de définir  $\sigma$ ,  
et  $U$  par les relations (si  $X_i = 0$ ) :

Cas  $X = (x_1, x_2) = ut_0$  :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 X}{\partial x_2^2}$$

$\sigma_{11} \leftarrow \frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} \rightarrow \sigma_{11}$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 X}{\partial x_1 \partial x_2} - X_1 x_2 - X_2 x_1$$

Date: 4 / 4 / 2010

est de complaisance (de BELTRAMI)

$X = ut_0$  une fct biharmonique  $\nabla^2 X = 0$

Pour résoudre un Pb de déf  
plane il faut trouver une  
fct de  $\sigma$  biharmonique

$$\left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) X$$

vérifiant les cond aux limites, on tire alors  
champ de valeur de  $\sigma$ , les déf par les  
relations de dualité  $\tilde{\epsilon} \cdot \tilde{\epsilon}$  et les déplacements  
par intégration du système suivant :

$$\text{déf plane} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = 0$$



$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} \right]$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{11} = U_{1,1} &= \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-\nu)\overset{\sigma_{11}}{\chi_{,12}} - \nu\overset{\sigma_{22}}{\chi_{,11}} \right] \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{22} = U_{2,2} &= \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-\nu)\overset{\sigma_{11}}{\chi_{,11}} - \nu\overset{\sigma_{22}}{\chi_{,22}} \right] \end{aligned} \right.$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} \right] \quad \sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} \right]$$

$$2\varepsilon_{12} = U_{1,2} + U_{2,1} = -2 \frac{(1+\nu)}{E} \overset{\sigma_{12}}{\chi_{,12}}$$

$$\boxed{\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}}$$

Le syst est intégrable si les eqs de BELTRAMI sont vérifiées.

L'hypothèse de déf plane convient pour une pièce suffisamment grande pour que l'on puisse négliger la déf longitudinale, nous considérons la direction  $\vec{x}_3$  comme privilégiée

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ds le cas où les structures ont des dim suivant } \vec{x}_3 \text{ très négligeables devant celles ds le plan } (x_1, x_2)$$

$$\sigma_{ij} = f(x_1, x_2),$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{tg} \quad \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} [\sigma_{11} + \sigma_{22}]$$

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}]$$

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{11})$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}]$$

$$\boxed{\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \nabla \chi}$$

$$\boxed{\epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}}$$

### Applications:

Exo1: Soit un corps cylindrique de la génératrice // à l'axe  $x_3$  en un pt M on suppose que :

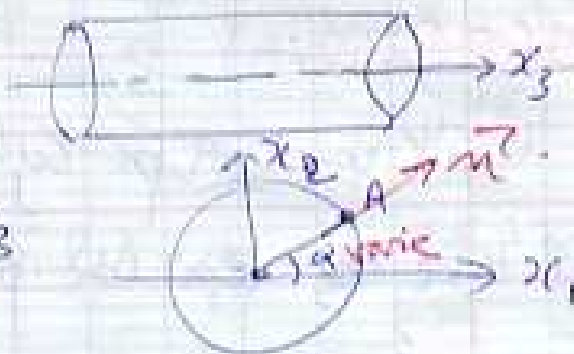
$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & -Kx_2 \\ \sigma_{12} & 0 & Kx_1 \\ -Kx_2 & Kx_1 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \text{cte} \quad \bar{\chi} = \bar{0} \quad (\text{les forces matérielles négligées})$$

- 1 - Si le corps est un cylindre de  $\sigma_{12}$  pour qu'il soit en  $\Leftrightarrow$  et que la surface latérale ne soit pas chargée.
- 2 - le syst matériel étant défini  $|x_1| \leq x_0$  et le tenseur  $\bar{\epsilon}$ , de l'effet au  $|x_2| \leq y_0$  centre de la face du tenseur de forces  $|x_3| \leq z_0$  appliquée sur le centre.

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \vec{x} = \vec{0}$$

Surface  
Laikrole  $\Rightarrow$   $f(A, \vec{m}) = \vec{0}$   
p/B A

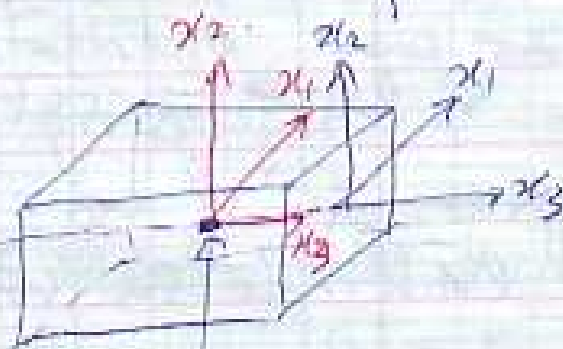
$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{G}_{12}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \widetilde{G}_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \widetilde{G}_{12} = f(x_3)$$



$$f(A, \vec{m}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{G}_{12} \sin \alpha \\ \widetilde{G}_{12} \cos \alpha \\ -K_1 \sin \alpha \oplus K_2 \cos \alpha \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\widetilde{G}_{12} = 0}$$

$\rightarrow$  vérifié  $\forall x_3$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_2 \\ 0 & 0 & K_1 \\ -K_2 & K_1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$-x_0 \leq x_1 \leq x_0 \quad \text{Centre}$$

$$-x_0 \leq x_2 \leq x_0$$

$$-x_0 \leq x_3 \leq x_0$$

1<sup>ère</sup> face :  $x_1 = x_0$  .  $\vec{n} = \vec{e}_1$   $x_3 \in \left[ \begin{array}{c} A \\ \times C_1 \end{array} \right] y_0$   
 $A(x_1 = x_0, |x_2| \leq y_0, |x_3| \leq z_0)$   $z_0$

$$\vec{f}(A, \vec{n}) = \vec{c} \cdot \vec{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Kx_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Force élémentaire.}$$

$$dA = dx_2 dx_3$$

$$\vec{F}_{C_2} = \int_A \vec{f} \cdot dA = \int_A -Kx_2 \vec{e}_3 dA$$

$$= \int_{-y_0}^{y_0} \int_{-z_0}^{z_0} -Kx_2 \vec{e}_3 dx_2 dx_3$$

$$\boxed{\vec{F}_{C_2} = 0 \vec{e}_3} \rightarrow \text{résultante des } \vec{F} \text{ au centre } C_1$$

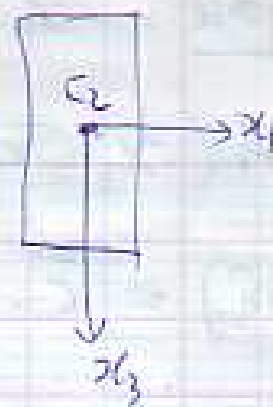
$$\vec{m}_{C_2} = - \int_A (-Kx_2 dx_2 dx_3) \vec{e}_3 \wedge x_2 \vec{e}_2$$

$$= K \vec{e}_1 \int_{-z_0}^{z_0} \int_{-y_0}^{y_0} x_2 dx_2 dx_3$$

$\downarrow 2z_0 \quad 2 \cdot \frac{y_0^3}{3} \quad \frac{x_2^2}{2} \Big|_{-y_0}^{y_0}$

$$\boxed{\vec{m}_{C_2} = 4K \frac{z_0 y_0^3}{3} \vec{e}_1}$$

2ème face:  $x_2 = y_0$ ,  $\vec{n} = \vec{x}_2$



$$A = \{ |x_1| \leq x_0, x_2 = y_0, |x_3| \leq z_0 \}$$

$$\vec{f}(A, \vec{n}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Kx_1 \end{Bmatrix} \quad dA = dx_1 dx_3$$

$$\vec{F}_{C_2} = \int_{-x_0}^{x_0} \int_{-z_0}^{z_0} Kx_1 dx_1 dx_3 \cdot \vec{e}_2 = \boxed{0 \vec{e}_3}$$

$$\vec{M}_{C_2} = \int_A (Kx_1 dx_1 dx_3) \vec{e}_2 \wedge x_1 \vec{e}_1$$

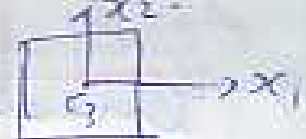
$$= K \vec{e}_2 \int_{-x_0}^{x_0} x_1^2 dx_1 \int_{-z_0}^{z_0} dx_3$$

$\downarrow$   
 $2z_0$

$$\boxed{\vec{M}_{C_2} = \frac{4}{3} K x_0^3 z_0 \vec{e}_2}$$



3e2 face :  $x_3 = y_0$  ,  $\vec{n} = \vec{x}_3$



$$\vec{f}(\vec{A}, \vec{n}) = \begin{Bmatrix} -Kx_2 \\ Kx_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad dA = dx_1 dx_2$$

$$\vec{F}_3 = \int_A -x_2 dx_1 dx_2 \vec{e}_2 + \int_A Kx_1 dx_1 dx_2 \vec{e}_1$$

$$\vec{F}_3 = 0 \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2$$

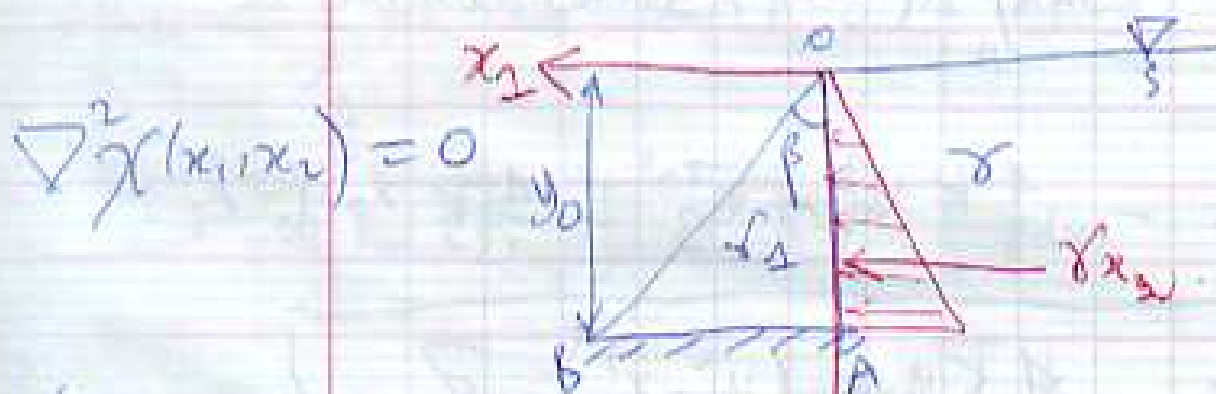
$$\vec{M}_3 = \int_A (-Kx_2 dx_1 dx_2) \vec{e}_1 \wedge x_2 \vec{e}_2 + \int_A (Kx_1 dx_1 dx_2) \vec{e}_2 \wedge x_1 \vec{e}_1$$

$$= -\frac{4}{3} K y_0^3 x_0 \vec{e}_3 - \frac{4}{3} K x_0^3 y_0 \vec{e}_3$$

$$\vec{M}_3 = -\frac{4}{3} K y_0 x_0 (y_0^2 + x_0^2) \vec{e}_3$$

Application: Date: 18/04/2010  
 1°/ Encastré en AB et soumis à la pression hydrostatique et  $\gamma_2$ : poids propre, l'épaisseur de OAB suivant  $x_3$  est prise égale à l'unité, en prenant comme  $f_{ct}$  de  $\sigma$  une  $f_{ct}$  homogène de degré 3, dést le  $\bar{C}$ .

2°/ Tracer les diag. des  $\sigma$  de la section  $x_2 = y_0$   $\beta' = \pi/6$   
 $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$ ,  $\gamma_1 = 20 \text{ kN/m}^2$ .



$\chi$  polynôme homogène  $n=2$

$$\chi_2(x_1, x_2) = \frac{a_2}{2!} x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + \frac{c_2}{2!} x_2^2$$

$$\nabla^2 \chi_2 = 0$$

$n=3$

$$\chi_3(x_1, x_2) = \frac{a_3}{3!} x_1^3 + \frac{b_3}{2!} x_1^2 x_2 + \frac{c_3}{2!} x_1 x_2^2 + \frac{d_3}{3!} x_2^3$$

$$\nabla^2 \chi_3 = 0$$

$$n=4$$

$$\chi_4(x_1, x_2) = \frac{a_4}{12} x_1^4 + \frac{b_4}{6} x_1^3 x_2 + \frac{c_4}{2} x_1^2 x_2^2 + \frac{d_4}{6} x_1 x_2^3 + \frac{e_4}{12} x_2^4$$

$$\Delta^2 \chi_4(x_1, x_2) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \chi_4 = 0$$

$$2a_4 + 2(2c_4) + 2e_4 = 0$$

$$\boxed{a_4 + 2c_4 + e_4 = 0} \quad \text{cond. pr. q. u.} \quad \Delta^2 \chi_4(x_1, x_2) = 0$$

$$n=5$$

$$\chi_5(x_1, x_2) = \frac{a_5}{20} x_1^5 + \frac{b_5}{12} x_1^4 x_2 + \frac{c_5}{6} x_1^3 x_2^2 + \frac{d_5}{6} x_1^2 x_2^3 + \frac{e_5}{12} x_1 x_2^4 + \frac{f_5}{20} x_2^5$$

$$\Delta^2 \chi_5(x_1, x_2) = 6a_5 x_1 + 2b_5 x_2 + 2(2c_5 x_1 + 2d_5 x_2) + 2e_5 x_1 + 6f_5 x_2$$

$$x_1 (6a_5 + 4c_5 + 2e_5) + x_2 (2b_5 + 4d_5 + 6f_5) = 0$$

$$\begin{cases} 6a_5 + 4c_5 + 2e_5 = 0 \\ 2b_5 + 4d_5 + 6f_5 = 0 \end{cases} \quad \Delta^2 \chi_5(x_1, x_2) = 0$$

$$10/ \chi_3(x_1, x_2) = \frac{a_3}{6} x_1^3 + \frac{b_3}{2} x_1^2 x_2 + \frac{c_3}{2} x_1 x_2^2 + \frac{d_3}{6} x_2^3$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{b_3 x_1^2}{2} + c_3 x_1 x_2 + \frac{d_3}{2} x_2^2 \right)$$

$$\boxed{\sigma_{11} = c_3 x_1 + d_3 x_2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_3}{2} x_1^2 + b_3 x_1 x_2 + \frac{c_3}{2} x_2^2 \right)$$

$$\boxed{\sigma_{22} = a_3 x_1 + b_3 x_2}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{b_3 x_1^2}{2} + c_3 x_1 x_2 + \frac{d_3}{2} x_2^2 \right)$$

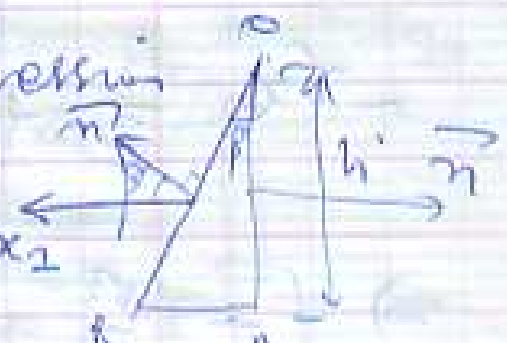
$$\boxed{\sigma_{12} = - (b_3 x_1 + c_3 x_2)}$$

$$\boxed{\sigma_{12} = - (b_3 x_1 + c_3 x_2) - x_1 x_1}$$

$\vec{X} = (0, \delta_2)$  . Forces volumiques non négligées.

CAL : en forces superficielles :

Face  $\overline{OA}$  soumise à pression  
hydrostatique.  
normale  $(-1, 0)$



$A(\cancel{x_1}=0, 0 < x_2 \leq h)$

$$\vec{f}(A, \vec{n}) = \begin{Bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-c_3 x_1^0 - d_3 x_2 = \sigma x_2 \Rightarrow \boxed{d_3 = -\sigma}$$

$$\sigma_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = 0}$$

$\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \beta}$

Face  $\overline{OB}$   $\vec{n} \begin{pmatrix} \cos \beta' \\ -\sin \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix}$

la pression atmosphérique = 0 ,  $A(x_2 = x_2 \tan \beta', x_2 \in ]0, h])$

$$\vec{f}(A, \vec{n}) = \vec{0}$$



$$\begin{cases} \sigma_{11} \cos \beta' - \sigma_{12} \sin \beta' = 0 \\ \sigma_{12} \cos \beta' - \sigma_{22} \sin \beta' = 0 \end{cases}$$

$$-\gamma x_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} (x_2 \tan \beta' (b_3 + \gamma_2)) = 0$$

$$\Rightarrow \left[ -\gamma \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} (b_3 + \gamma_2) \tan \beta' \right] x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} (b_3 + \gamma_2) \tan \beta'$$

$$\Rightarrow b_3 = \gamma \sqrt{3} \tan \beta' - \gamma_2$$

$$\boxed{b_3 = 3\gamma - \gamma_2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \overbrace{3\gamma}^{3\gamma} + \gamma_2 \right) x_2 \tan \beta' - \frac{1}{2} \left( x_2 (b_3 + \gamma_2 \tan \beta') \right) = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} 3\gamma x_2 - x_2 (3\gamma - \gamma_2 + \gamma_2 \tan \beta')$$

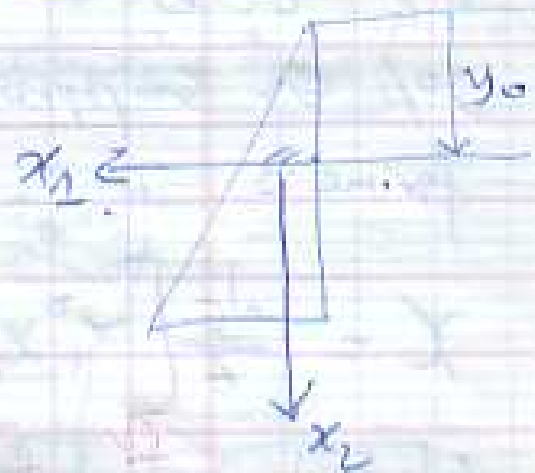
$$-3x = 3x - x_2 + a_3 \tan \beta'$$

$$x_2 - 6x = \underbrace{a_3 \tan \beta'}_{\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}} \rightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (x_2 - 6x)}$$

2°/  $x_2 = y_0$

$$\vec{n}(0, 1)$$

$$A \begin{pmatrix} x_2 \in ]0, y_0[ \tan \beta' \\ x_2 = y_0 \end{pmatrix}$$



$$f(A, \vec{x}_2) = \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{12} = -3x x_2$$



$$- \sqrt{3} x y_0 \stackrel{A \cdot N}{=} -10 \sqrt{3} y_0$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}} (x_1 - 6x) x_1 + (3x - x_1) x_2$$

$$x_1 = 0 \rightarrow (3x - x_1) y_0 = 10 y_0$$



$$\frac{1}{\sqrt{3}} (x_1 - 6x) y_0 \frac{1}{\sqrt{3}} + (3x - x_1) y_0$$

$$\frac{x_1}{3} - 2x = \left( x - \frac{2}{3} x_1 \right) y_0$$



$$10 = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$- \frac{20}{3} y_0$$

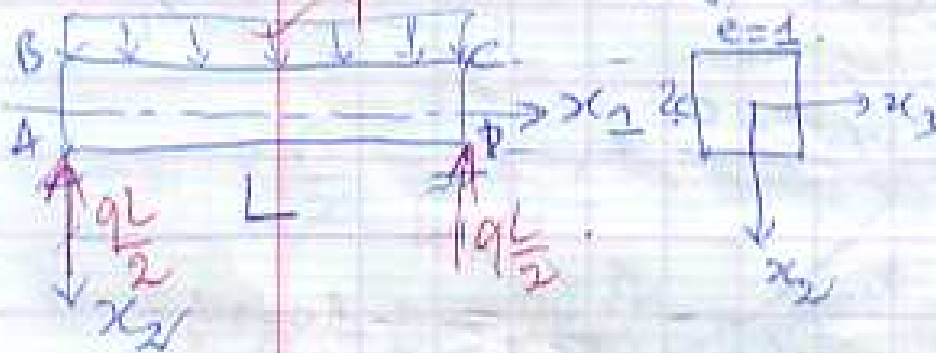
## Exo2

Soit une poutre rectangulaire dont la section transversale a pour largeur l'unité.

1°/ Ecrire les CAL.

2°/ On suppose une  $f^cr$  de  $\sigma$  d/a forme :

$$\chi = \frac{d_1}{6} \left[ x_1^2 x_2^3 - \frac{x_2^5}{5} \right] + \frac{b_3}{2} x_1^2 x_2^2 + a_2 \frac{x_1^2}{2} + \frac{d_2}{6} x_2^3$$



Face BC:  $x_2 = -c$ ,  $0 < x_1 < L$ .

$$\vec{n} = (0, -1)$$

$$f(A, \vec{n}) = \begin{Bmatrix} -\sigma_{12} \\ -\sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +qL \end{Bmatrix}$$

$\downarrow \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{d_5}{6} (3x_1^2 x_2^3 - x_2^4) + b_3 x_1^2 x_2 + \frac{d_3 x_2^2}{2} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{d_5}{6} (6 x_1^2 x_2 - 4 x_2^3) + b_3 x_1^2 + d_3 x_2$$

$$\boxed{\bar{\sigma}_{11} = d_5 x_1^2 x_2 - \frac{2}{3} d_5 x_2^3 + b_3 x_1^2 + d_3 x_2}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{d_5}{6} (2x_1 x_2^3) + b_3 x_1 x_2^2 + a_2 x_1 \right)$$

$$\boxed{\bar{\sigma}_{22} = \frac{d_5 x_1^3}{3} + b_3 x_1^2 + a_2}$$

$$\bar{\sigma}_{12} = - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{d_5}{6} (2x_1 x_2^3) + b_3 x_1 x_2^2 + a_2 x_1 \right)$$

$$\boxed{\bar{\sigma}_{12} = - d_5 x_1 x_2^2 - 2 b_3 x_1 x_2} \quad \vec{X} = \vec{0}$$

Face ~~BC~~ CAL

$$\bar{\sigma}_{12} = 0 \Rightarrow -d_5 x_1 c^2 + 2b_3 x_1 c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(-d_5 c + 2b_3) x_1 = 0} \quad \textcircled{1}$$

$$-\bar{\sigma}_{22} = q \rightarrow \boxed{-\frac{d_5 c^3}{3} + b_3 c^2 + a_2 = q} \quad \textcircled{2}$$

Face AB :  $\vec{n}(-1, 0)$

$A(x_2 = 0, -c < x_2 < c)$

$f(A, \vec{n}) = \begin{Bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$

$F = -\frac{qL}{2} \vec{e}_2 = \int_A -\sigma_{12} dA$

Face CD :  $\vec{n}(1, 0)$

$A(x_1 = L, -c < x_2 < c)$

$f(A, \vec{n}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$

Face DA :  $\vec{n}(0, 1)$

$A(0 < x_1 < L, x_2 = c)$

$\begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\frac{d_5 c^3}{3} + b_3 c^2 + a_2 = 0$  (4)

$d_5 x_2 c^2 - 2b_3 x_2 c = 0$

$(d_5 c + 2b_3) x_1 = 0$  (3)



① ~~245~~ ⇒

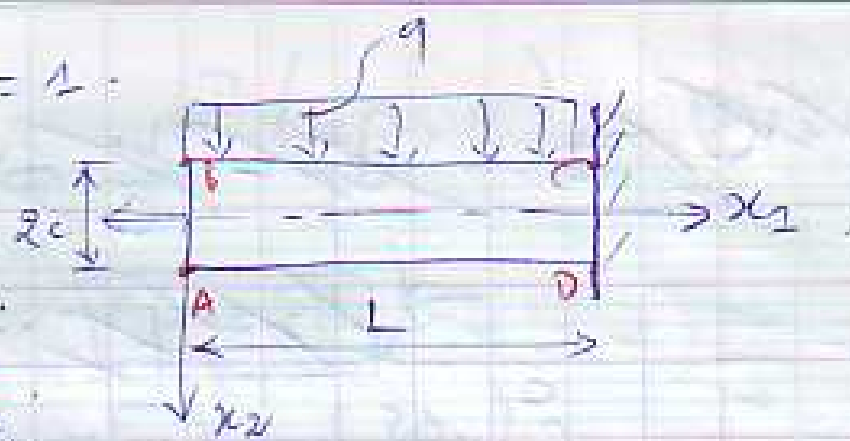
$$\cancel{d_5 = \frac{2b_3}{c}} \Rightarrow \boxed{\cancel{d_5 = b_3 = 0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_5 = 0} \dots$$

$$\begin{aligned}
 - \int \bar{b}_{12} \, dA &= \int_{-c}^c \int_{-0,5}^{0,5} (d_5 x_1 x_2^2 + 2b_3 x_1 x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\
 &= d_5 x_1
 \end{aligned}$$

Exo:

$$e = 1$$



Navier:  $\sigma_{xx} = \frac{q}{2I_2} y^2$

Timoshenko:  $\tau_{xy} = \frac{T}{b \cdot I_2} \frac{y^2}{2}$

1<sup>st</sup> approximation: **RDM**

$$\sigma_{11} = -\frac{q}{2I_3} x_1^2 x_2 \quad \text{et} \quad \sigma_{22} = 0$$

$$\sigma_{12} = -\frac{q}{2I_2} x_1 (c^2 - x_2^2)$$

$$I_3 = \frac{(2c)^3 \cdot 1}{12} \quad - q \cdot c$$

(11) vérifiées —, l'autre en  $\leq$ .

vérifiée.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (-) \quad \begin{cases} -\frac{q}{I_3} x_1 x_2 + \frac{q}{I_3} x_1 x_2 = 0 \\ -\frac{q}{2I_3} (c^2 - x_2^2) = -\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \end{cases}$$

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

$$\sigma_{22} = +\frac{q}{2I_3} \left( c^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right) + f_1(x_1)$$

CAL :

Face AB :  $\{ x_2 = 0, -c < x_2 < c \}$

$$f(A, \vec{x}_2) = \begin{Bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Face BC :  $\{ x_2 = -c, 0 < x_2 < L \}$

$$f(A, \vec{x}_2) = \begin{Bmatrix} -\sigma_{12} \\ -\sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Face AD :  $\{ x_2 = c, 0 < x_2 < L \}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Face CD :  $\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$  ,  $x_2 = L$ ,  $-c < x_2 < c$

$$F = -qL \int_A dA \cdot \vec{e}_2 = \boxed{-qL^2 2c}$$

$\int dx_2 dx_3$

Face 1D: CARL cinématique.

$$U_1, U_2 = 0$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = 0$$

$$-\sigma_{11} = 0 \Rightarrow \boxed{f_2(x_2) = 0}$$

$$-\sigma_{12} = q \Rightarrow \frac{q}{2I_3} \left( c^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right) + f_1(x_1) = q$$

$x_2 = c$

$$\sigma_{22} = 0 \Rightarrow \frac{q}{2I_3} \left( c^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right) + f_2(x_1) = 0$$

$x_1 = c$

$$\Rightarrow \boxed{f_2(x_2) = -\frac{q}{2}}$$

$$\nabla(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f_2(x_2)}{\partial x_2^2} + \frac{q x_2}{I_3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{q x_2}{I_3} + \frac{\partial^2 f_1(x_1)}{\partial x_1^2}$$

$$-\frac{2 q x_2}{I_3} + \frac{\partial^2 f_1(x_1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2(x_2)}{\partial x_2^2} = 0$$

$f_1(x_1) = Cx_1^3$

$$\frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2} = \frac{2qx_2}{I_3}$$

$$f_2(x_2) = \frac{qx_2^2}{3I_3} + K_1 x_2 + K_2$$

Face AB:

$$-c < x_2 < c, \quad x_1 = 0$$

$$\int \sigma_{11} dA = 0, \quad dA = dx_2 dx_3$$

$$\int_{-c}^c \left( \frac{qx_2^2}{3I_3} + K_1 x_2 + K_2 \right) dx_2 = 0$$

$$\left. \frac{q x_2^4}{12 I_3} \right|_{-c}^c + K_1 \left. \frac{x_2^2}{2} \right|_{-c}^c + K_2 x_2 \Big|_{-c}^c = 0 \quad (\times)$$

$$\int (\sigma_{11} dA) x_2 = 0 \rightarrow \boxed{K_1 = -\frac{q c}{5 I_3}}$$

$$\sigma_{11} = \frac{-q x_2^2}{2 I_3} + \frac{q x_2^2}{3 I_3} - \frac{q c^2 x_2}{5 I_3}$$

$$\boxed{K_2 = 0}$$

$$\sigma_{22} = \frac{q}{2 I_3} \left( c^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right) - \frac{q}{2}$$

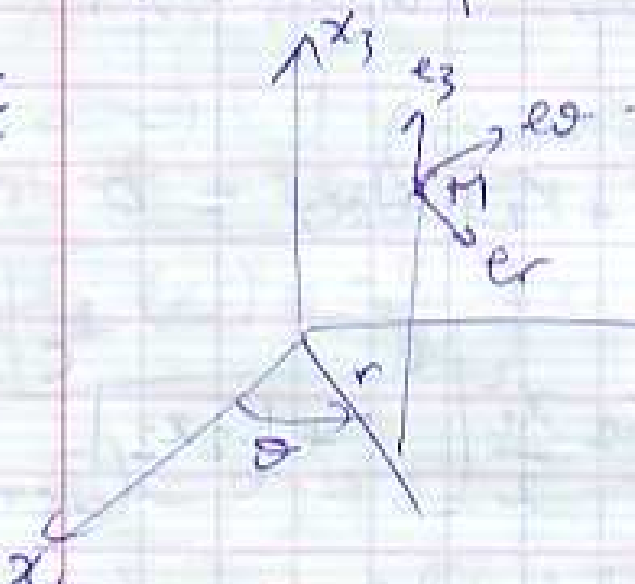


# Problèmes en coord cylindriques

## I / Rappels :

### 1.1 Coord. cylindriques :

DS un espace Euclidien à 3D, un syst de coord curvilinéaire appelé syst de coord cylindrique est défini par :


$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \frac{x_2}{x_1} \\ x_3 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\theta &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 1.2 Coord. polaires :

(a forme 2D dimensionnelle des coord cylindriques)

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \frac{x_2}{x_1}$$

II. Intro: La résolution de pb axisymétriques revient un très grand intérêt pratique cas. de solide de révolution, si le chargement est également axisymétrique alors le pb à 3D se ramène de façon évidente à un pb 2D fct de 2 coords  $(r, \chi_3)$ , ds le cas d'un chargement qlq, on peut le décomposer en série de Fourier suivant les coords circonférentielles et étudier séparément le qpt de la structure suivant chaque harmonique.

III. Exs de l'élasticité à 2D en coord. polaires  
Lorsqu'on étudie les anneaux, les disques les bords courbes, il est + commode d'utiliser les coord. polaires plutôt que les coord. rect cartésiennes. La pol du pt d'un plan médium de la structure étudiée est repérée et définie par sa distance à l'origine  $O$  qui est  $(r)$  et par un angle  $(\theta)$  orienté  $(Ox_1, r)$ .

• La longueur de l'élément est unitaire 1

• l'état de  $\sigma$  est  
symétrique par réciprocité.

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta}$$

• Projection de l'ensemble des forces :

Sur l'axe  $\frac{d\theta}{2}$  :

$$\sum F_r = 0 \quad \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r \cdot r d\theta$$

$$+ \left( \sigma_{\theta r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cos \frac{d\theta}{2} - \sigma_{\theta r} r d\theta \cos \frac{d\theta}{2}$$

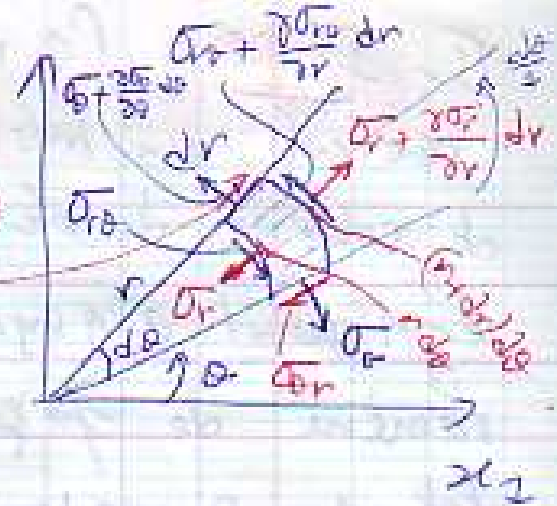
$$- \sigma_{\theta} dr \sin \frac{d\theta}{2} - \left( \sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \sin \frac{d\theta}{2}$$

$$+ X_r r d\theta dr = 0$$

En simplifiant, on obtien :

$$\left[ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [\sigma_r - \sigma_{\theta}] + X_r = 0 \right]$$

①



On obtient d'une manière analogue et en projetant  
 de la direction  $\theta$   $\perp \vec{e}_r$



$$\sum F_\theta = 0 \Rightarrow \left[ \frac{\partial \bar{\sigma}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \theta} + \frac{2 \bar{\sigma}_{r\theta}}{r} - X_\theta = 0 \right]$$

## IV Etude de loi ELD en coord Polaires (2)

### 4.1 Loi de Hooke :

Rem: Comme l'angle  $d\theta$  est petit, on peut  
 admettre que l'angle entre les faces de l'élément  
 en coord polaires est à peu près droit ( $90^\circ$ )

Par analogie en coord cartésiennes on peut

écrire  $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_\theta = \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_r - \nu \bar{\sigma}_r] \\ \bar{\epsilon}_r = \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_r - \nu \bar{\sigma}_\theta] \end{array} \right.$

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_r - \nu \bar{\sigma}_\theta]$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 2E\bar{\epsilon}_r = \frac{\bar{\sigma}_r}{G}$$

$$\bar{\sigma}_r = de + 2G \bar{\epsilon}_r$$

$$\bar{\sigma}_\theta = de + 2G \bar{\epsilon}_\theta$$

$$\bar{\sigma}_{r\theta} = 2G \bar{\epsilon}_{r\theta}$$

$$\boxed{e = \bar{\epsilon}_r + \bar{\epsilon}_\theta}$$

Si le matériau est isotrope, les relations de Hooke peuvent se mettre :

$$\vec{\sigma} = \sum \vec{\epsilon} \quad \text{matrice d'élasticité.}$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{\sigma_r} \\ \overline{\sigma_\theta} \\ \overline{\sigma_z} \\ \overline{\sigma_{r\theta}} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & & & \\ & 1-\nu & & \\ & & 1-\nu & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ 2\epsilon_{r\theta} = \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix}$$

#### 4.2 Fck d'Airy:

En absence de forces volumiques, les  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{r\theta}$  s'expriment en fct de la fct d'Airy  $\chi(r, \theta)$  par les relations suivantes.

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta}$$



Rem : Il existe une seule fonc d'Airy s'exprimant  
différemment suivant le syst considéré cartésien  
ou polaire.

On obtient l'éq loi harmonique, en remplaçant  
 $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$ .

$$\nabla (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{r^2} \right) X = 0$$

### 4.3 Relations géométriques entre les déplacements et les déformations :

Rappels :  $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$  ?

$$\vec{U} = (u_r, u_\theta, u_z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_i}}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial z} & \frac{\partial x_2}{\partial z} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left[ U_{\theta,r} + \frac{1}{r} U_{r,\theta} - U_{\theta}/r \right] & \frac{1}{2} \left[ U_{\phi,r} + U_{r,\phi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[ U_r + U_{\theta,0} \right] & & \\ & \frac{1}{2} \left[ U_{\phi,3} + \frac{1}{r} U_{r,3} \right] & \end{bmatrix}$$

Symétrique.

$U_{3,3}$

En coord. polaires :

$$\begin{aligned} \Sigma_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r} \\ \Sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial U_{\theta}}{\partial \theta} + U_r \right] \\ \Sigma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{U_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_{\theta}}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

5 - Applications :

5-1 : Etat radial simple de  $\sigma$  : c'est l'état de  $\sigma$  dans lequel existe seulement  $\sigma_r$  et  $\sigma_{\theta} = \sigma_{\phi} = 0$

Ces eqs. d'éq. se réduisent :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r) = 0$$

eqs d'eq: ① et ②

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_r = 0 & X_r \approx 0 \\ & X_\theta \approx 0 \end{cases}$$

est de compatibilité:

$$\nabla (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

On peut intégrer l'éq et se donner par la méthode de Fourier représentant la  $f_{cr}$ :

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \underline{\underline{\xi(r) \cdot \psi(\theta)}}$$

$$\begin{cases} \xi' \psi(\theta) + \frac{1}{r} \xi \cdot \psi = 0 & - \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi'' \psi + \frac{1}{r} \xi' \psi + \frac{1}{r^2} \psi'' \xi = 0 & - \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} \Rightarrow \boxed{\xi' + \frac{1}{r} \xi = 0} \quad \text{WEEK}$$

$$\frac{\xi'}{\xi} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{K}{r}} \quad K = \text{const.}$$

$$\frac{2K}{r^3} \psi + \frac{1}{r} \left( -\frac{K}{r^2} \right) \psi + \frac{K}{r^3} \psi'' = 0$$

$$\frac{K}{r^3} \psi + \frac{K}{r^3} \psi'' = 0 \Rightarrow \boxed{\psi + \psi'' = 0}$$

Soln trs Générale :

$$\psi(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta$$

d'où

$$\boxed{\bar{\sigma}_{rr} = \frac{AK'}{r} \cos \theta + \frac{BK'}{r} \sin \theta} = -\frac{K}{r} \cos(\theta - \theta_0)$$

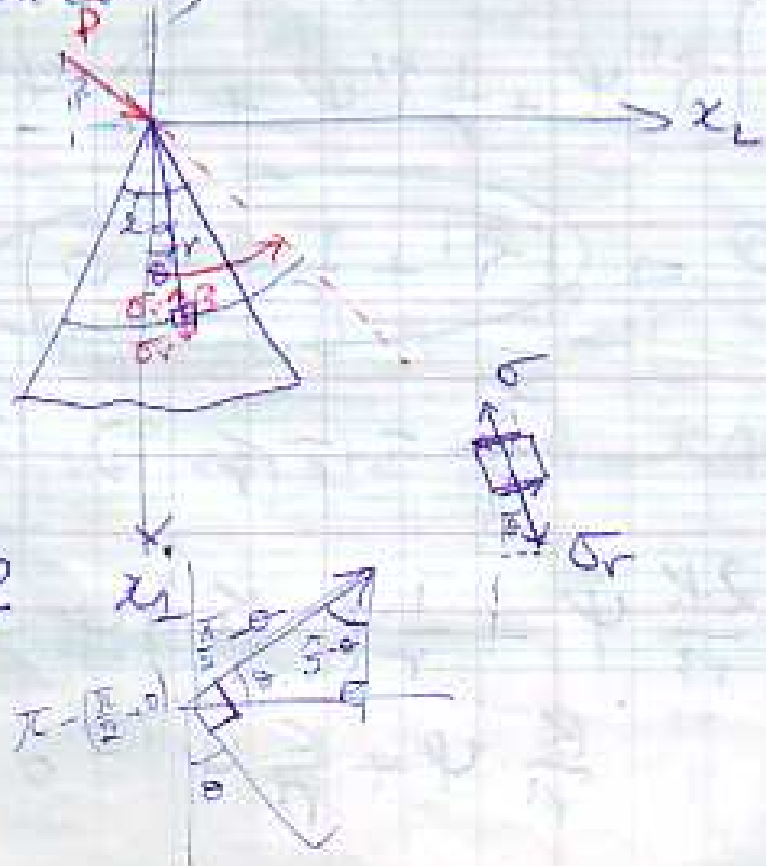
$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\theta} &= 0 \\ \bar{\sigma}_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Date : 16/05/2010

a/ Force agissant au sommet d'un coin :

La distribution radiale simple peut servir à rechercher les  $\sigma$  produits de un coin par une force concentrée au sommet, on prendra  $e=1$  (épaisseur du coin)

Pour trouver les  $\sigma$  et  $K, \theta_0$   
Utilisant les bords d'un coin sous l'action de la force  $P$  et des  $\bar{\sigma}_{rr}$ .



Projection horizontale = 0

$$\int \overline{Or} \sin \theta r d\theta \times \vec{e}^2 + P \sin \beta = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum F_v = 0$$

$$\int \overline{Or} \cos \theta r d\theta + P \cos \beta = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\overline{Or} = -\frac{K}{r} \left( \theta \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \right)$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \int_{-\alpha}^{+\alpha} -K \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta + K \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta + P \sin \beta = 0$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow -K \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta + K \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta + P \cos \beta = 0$$

$$K \cos \theta_0 = \frac{P \cos \beta}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

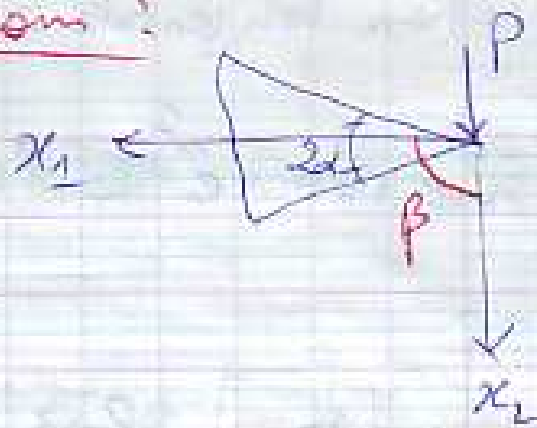
$$K \sin \theta_0 = \frac{P \sin \beta}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \theta_0 = \tan \beta \frac{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \end{array} \right.$$

$$K = P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2}}$$



## b) Flexion 2D linéaire :



$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty}$$

$$\cos \beta = 0$$

$$\sin \beta = 1$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

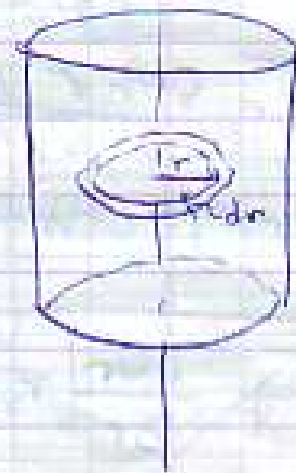
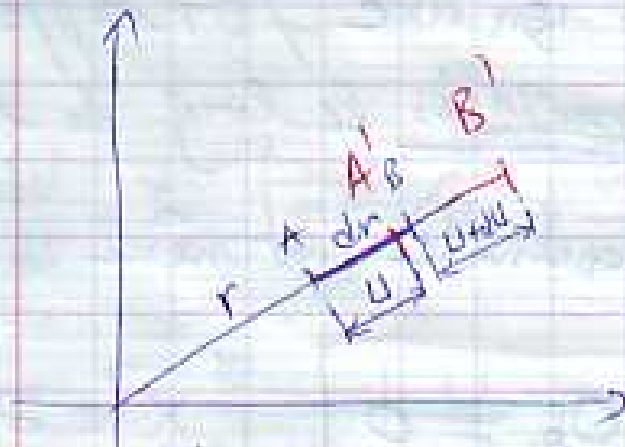
$$K = \frac{P}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

$$\sigma_r = \frac{P}{r(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \sin \theta \quad \begin{cases} \sigma_\theta = 0 \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Traction - compression simple  $\rightarrow \boxed{\beta = 0}$

5-2 Tubes à parois épaisses : Soit un corps homogène cylindrique, chargé de manière que la charge soit asymétrique axiale et ne varie pas le long de l'axe de symétrie  $\vec{x}_3$ , (le déplacement est radial  $\rightarrow \sigma_3 = \text{cte}$  (état pseudo plan))

$$\vec{U}(x_i) = (U_1(x_i) = U, U_2 = 0, U_3 = 0)$$



avant sollicitation  $AB = dr$

après //  $A'B' \rightarrow A'B'$

\* Déformation radiale:

$$\epsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \left[ \frac{dU}{dr} \right]$$

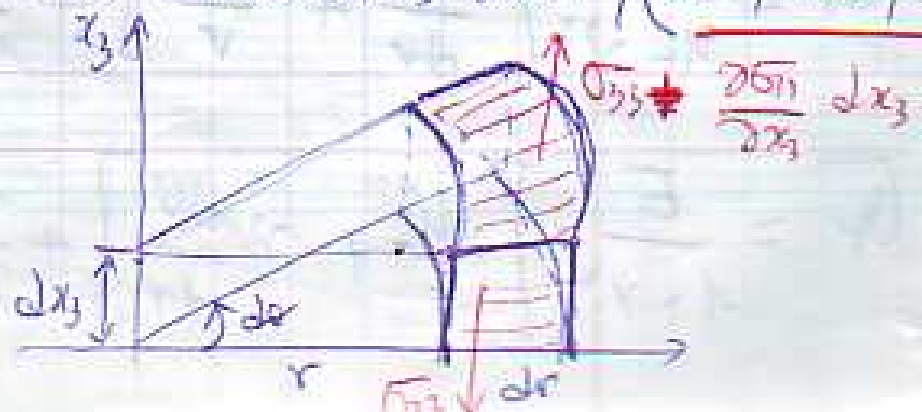
$U$ : def. rad. int.

\* Déf. circulaire:

$$\epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+U) - 2\pi r}{2\pi r} = \left[ \frac{U}{r} \right]$$



Pour trouver  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ , isolant un élément du cylindre dont les dimensions sont,  $(dr, r d\theta, dx_3)$



Les  $\sigma_{33}$  résultent de la charge du cylindre par des  $\vec{F} \parallel$  à son axe, on suppose que ces  $\sigma$  sont invariantes le long de l'axe  $\vec{x}_3$

La projection radiale de même :

$$\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r - \sigma_\theta = 0 \quad (\vec{X} = \vec{0})$$

d'après la loi de Hooke généralisé

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_3)]$$


$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_3 + \sigma_r)]$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \epsilon_r + \nu \epsilon_\theta \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_3$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \epsilon_\theta + \nu \epsilon_r \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_3$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{dU}{dr} + \frac{\nu U}{r} \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_3$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{U}{r} + \nu \frac{dU}{dr} \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_3$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dU}{dr} \right]$$


$$\Rightarrow \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{dU}{dr} + \frac{\nu U}{r} \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{\sigma_\theta}{3} + \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dU}{dr} \right] r$$

$$- \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{U}{r} + \nu \frac{dU}{dr} \right] - \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{\sigma_\theta}{3} = 0$$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} \cdot r + \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0}$$

Solution générale:

$$\boxed{U = C_1 r + \frac{C_2}{r}}$$

$$-\frac{2\nu}{3}$$

$C_1, C_2$  à déter avec CAL.

a - Déterminer  $u$  et  $\sigma$  d'un cylindre épais :

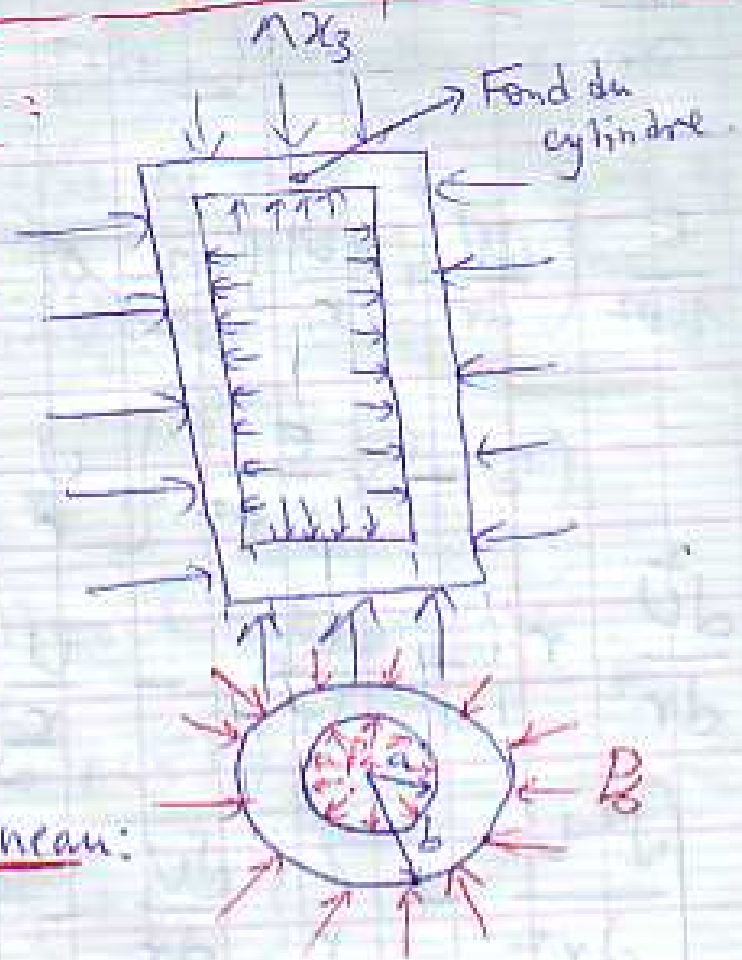
Pb de LAMÉ :

Ce cylindre ayant au fond apparent une force  $F$  :

$$\vec{F}_3 = -\vec{e}_3 [P_b \pi b^2 - P_a \pi a^2]$$

se répartit sur l'anneau :

$$\pi (b^2 - a^2)$$



$$\sigma_{33} = \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2}$$

CAL :  $r=a \rightarrow \sigma_r = -P_a$  (comp int)  
 $r=b \rightarrow \sigma_r = -P_b$  (comp ext)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1 + \frac{C_2}{r^2} + \nu \left( C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_{33} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1 - \frac{C_2}{r^2} + \nu \left( C_2 + \frac{C_1}{r^2} \right) \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_{33} \quad (2)$$



$$\textcircled{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{r a^2}{1-\nu^2} \left[ C_1(1+\nu) - \frac{C_2}{a^2}(1-\nu) \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_{33} = -P_a \\ \frac{r b^2}{1-\nu^2} \left[ C_1(1+\nu) - \frac{C_2}{b^2}(1-\nu) \right] + \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_{33} = -P_b \end{cases}$$

Après résolution :

$$\sigma_r = \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{P_a - P_b}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_\theta = \quad \quad + \quad \quad$$

$$U = \underbrace{\frac{1-\nu}{E} \left( \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} \right) r}_{C_1} + \underbrace{\frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{P_a - P_b}{b^2 - a^2} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} r}_{C_2}$$

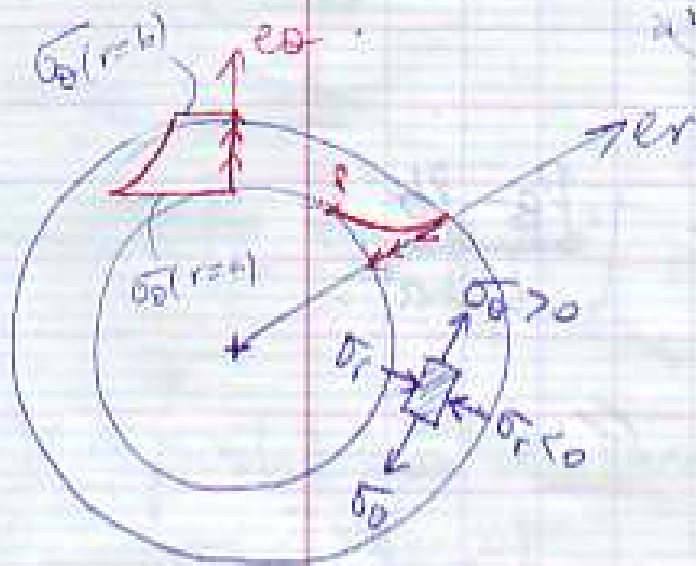
b/ Cylindre ouvert chargé par la pression intérieure

$$P_a = P \quad , \quad P_b = 0 \quad \boxed{\sigma_{33} = 0}$$

$$\sigma_r = P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad , \quad \sigma_\theta = P \frac{a^2}{b^2 - a^2} + P \frac{a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} + P \frac{a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

$$\sigma_r = P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \begin{matrix} r=a \rightarrow -P \\ r=b \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\sigma_\theta = P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \begin{matrix} r=a \rightarrow P \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \\ r=b \rightarrow P \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \end{matrix}$$



c/ Cylindre ouvert chargé par une pression ext

$$\sigma_z = 0, \quad p_a = 0, \quad p_b = P$$

$$\sigma_r = P \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \begin{matrix} r=a \rightarrow 0 \\ r=b \rightarrow -P \end{matrix}$$

$$\sigma_\theta = -P \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \begin{matrix} r=a \rightarrow -P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \\ r=b \rightarrow -P \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \end{matrix}$$

Rem: le cylindre sera considéré infiniment ~~par~~ l'épais  
 $p \rightarrow \infty$ , cylindre de rapport  $\frac{b}{a} > 4$   
 peut être assimilée un cylindre d'épaisseur infinie

2° Dans le cas d'un cylindre sans cavité intérieure  
 ( $a = 0$ ) les  $\sigma$  radiales et circonferentielles  
 sont égales.

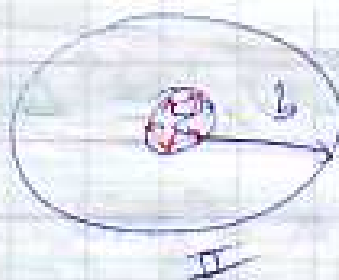
Dét de

1/ Dét des  $\sigma$  dans <sup>tube</sup> l'étude composée:

Quand - utilisant-on <sup>tube</sup> l'étude composée?

Ds le cas d'une pression int ou ext très grande  
 on utilise des tubes obtenus par frittage de 2  
 ou plusieurs cylindres.

Comment obtient-on des tubes composés?



$a, b, c$  connus

Si on chauffe le cylindre II, il se dilate  
 le cylindre I peut y être introduit ds II  
 librement.

Après refroidissement il se produit entre les 2 cylindres une pression de contact  $P_k$

I	$P_b = P_c = P_k$	II	$P_a = P_k$
	$a \rightarrow a$		$a \rightarrow c$
	$b \rightarrow c$		$b \rightarrow b$

Dér de  $P_k$  (pression de frittage):

- Le rayon ext du cylindre I se contracte <sup>diminue</sup> et les points de sa surface se déplacent de la

$$\epsilon_t < 0 \quad - U_1$$

- Le rayon ext du cylindre II se trouve agrandir, le déplacement qui en résulte est  $> 0$  c'est  $U_2$ .

La  $\epsilon_t$   $U_2 - U_1 = \Delta$  est la différence des rayons à froid.

$$\begin{array}{l|l} a \rightarrow a - U_1 & E, \nu \text{ sont supposés} \\ b \rightarrow b + U_2 & \text{identiques pour les 2 cylindres} \end{array}$$

$$K = \frac{EA}{2C^3} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}$$

Application On se propose d'étudier une barre  
courbe, de sect rectangulaire et une cste.  
dont l'axe circulaire est soumis à la flexion  
dans le plan de courbure par les couples  
M appliqués à ses extrémités.

- 1°/ Ecrire les CAL du pb
- 2°/ Exprimer les  $\sigma$  par la fct d'Airy  
suivante  $\chi(r, \theta) = \chi(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D$
- 3°/ Dév  $\sigma$  et  $u$ .

$$2^\circ / \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \left[ \frac{A}{r} + 2B r \ln r + B r + 2C r \right]$$

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 1) + 2C$$

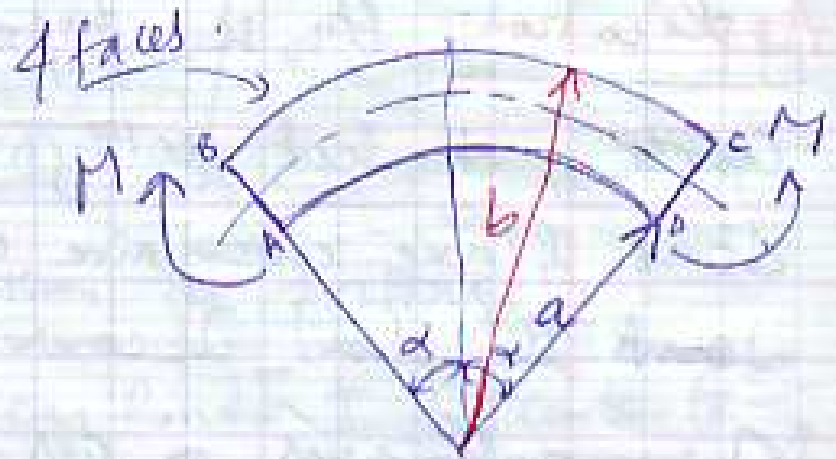
$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 2B + B + 2C$$



$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + B(2\ln r + 1) + 2C$$



$\frac{b \cdot b^3}{b^2} = \frac{b^4}{b^2} = b^2$   
CAL  $\left[ \frac{b^4}{b^2} \right]$



AD  $r=a \rightarrow \sigma_r = 0$  — ①

BC  $r=b \rightarrow \sigma_r = 0$  — ②

AB :  $N=0$  ,  $\int_a^b \sigma_{\theta\theta} dA = 0$  — ③  $dA = dr \cdot r \cdot d\theta$   
 $M \neq 0$  ,  $\int_a^b \sigma_{\theta\theta} dr = M$  — ④

①  $\Rightarrow \frac{A}{a^2} + B(2\ln a + 1) + 2C = 0$

②  $\Rightarrow \frac{A}{b^2} + B(2\ln b + 1) + 2C = 0$

$$B \left[ (2\ln a + 1)a^2 - (2\ln b + 1)b^2 \right] + 2C(a^2 - b^2) = 0$$

(\*)  $\downarrow$   
(a-b)(b+a)

$$\nabla^2 \chi = 0$$

$$\nabla \left( \frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 1) + 2C - \frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 3) + 2C \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left( \frac{4B}{r} \right) + \left[ -\frac{4B}{r^2} \right] = 0 \quad (\text{c'est vérifié})$$

$$\nabla^2 \chi = 0$$

$$r^{-2} \rightarrow \frac{r}{-2} = -\frac{1}{r}$$

⇒ Existence

$$\int \chi r = r \ln r - r \cdot \overline{\text{Orr}}, \overline{\text{Orr}}$$

$$\int_a^b \overline{\text{Orr}} dr = \int_a^b \left( -\frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 3) + 2C \right) dr$$

$$= \frac{1}{r} \Big|_a^b + 2B \left[ r(\ln r - 1) \right]_a^b + (3B + 2C)(b - a)$$

$$\frac{a-b}{ab} = \frac{a-b}{ab} + 2B \left[ b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1) \right]$$

$$+ (3B + 2C)(b - a)$$

$$B \left[ 2 \left[ b \ln b - a \ln a - (b - a) \right] + 3(b - a) \right] \quad (3)$$

$$= \left[ \frac{a-b}{ab} + B \left[ 2(b \ln b - a \ln a) + b - a \right] + 2C(b - a) = 0 \right]$$

④

$$B \text{ Lab } \ln \frac{b}{a} = -(a+b) \left[ M + \frac{a-b}{ab} \right]$$

By LoTfl LOIAnD 2011-2012

By Lotfi LOIAnD 2011-2012