

Partie : Commande optimale :

Exo. 5

— Fonction d'Hamilton

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = x^2(t) + u^2(t) + \lambda(t) u(t) \quad (1)$$

— Expression de la loi de commande

$$\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial u(t)} = 2u(t) + \lambda(t) = 0 \Rightarrow u(t) = -\frac{\lambda(t)}{2}$$

— Optimum de la fonction d'Hamilton

$$H^* = H|_{u(t)=-\frac{\lambda(t)}{2}} = x^2(t) - \frac{\lambda^2(t)}{4}$$

— Équations d'Hamilton-Pontryagin

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda(t)} = -\frac{\lambda(t)}{2} \quad (2)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x(t)} = -2x(t) \quad (3)$$

En dérivant (2), il vient

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{2}$$

En remplaçant $\dot{\lambda}(t)$ par son expression donnée par (3), on obtient

$$\ddot{x}(t) - x(t) = 0$$

D'après l'indication, la solution de l'équation est : $x(t) = c_1 \cosh(t) + c_2 \sinh(t)$. Pour déterminer les constantes c_1 et c_2 , on impose les conditions suivantes :

$$x(0) = 1, \quad \lambda(1) = 0 \text{ (état final libre)}$$

— $t = 0$: $x(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

— $t = 1$: d'après l'équation (2), on a

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -2\dot{x}(t) \\ &= -2(c_1 \sinh(t) + c_2 \cosh(t)) \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda(1) = -2(c_1 \sinh(1) + c_2 \cosh(1))$$

$$0 = -2(1 \sinh(1) + c_2 \cosh(1)) \Rightarrow c_2 = -\frac{\sinh(1)}{\cosh(1)}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lambda^*(t) &= -2 \left(\sinh(t) - \frac{\sinh(1)}{\cosh(1)} \cosh(t) \right) \\ &= -2 \left(\frac{\cosh(1) \sinh(t) - \sinh(1) \cosh(t)}{\cosh(1)} \right) \end{aligned}$$

La commande optimale est :

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\frac{\lambda^*(t)}{2} \\ &= \frac{\cosh(1) \sinh(t) - \sinh(1) \cosh(t)}{\cosh(1)} \\ &= -\left(\frac{\sinh(1) \cosh(t) - \cosh(1) \sinh(t)}{\cosh(1)} \right) \end{aligned}$$

D'après l'indication, on a :

$$\sinh(1) \cosh(t) - \cosh(1) \sinh(t) = \sinh(1-t)$$

alors

$$u^*(t) = -\frac{\sinh(1-t)}{\cosh(1)}$$

Exo. 6 Données du problème :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1$$

Pour le problème de régulation, on a :

$$u(t) = -R^{-1} B^T K x(t)$$

K est la solution de l'équation de Riccati. Comme A, B, Q et R sont constantes et l'horizon de commande est infini, alors l'équation de Riccati est algébrique :

$$A^T K + K A - K B R^{-1} B^T K + Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b^2 & bc \\ bc & c^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-b^2 + 1 = 0 \quad (4)$$

$$a - bc = 0 \quad (5)$$

$$2b - c^2 = 0 \quad (6)$$

$$(4) \Rightarrow b = \pm 1$$

$$(6) \Rightarrow c = \pm\sqrt{2} \Rightarrow b = 1$$

$$(5) \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

$$(7)$$

$a = -\sqrt{2}$ est rejetée car la matrice K solution de l'équation de Riccati n'est pas définie positive, alors $c = \sqrt{2}$. Par conséquent, la solution de l'équation de Riccati est :

$$K = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et la commande optimale est :

$$u(t) = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -x_1(t) - \sqrt{2}x_2(t)$$

Exo. 7 On doit écrire le modèle 'équation différentielle ordinaire de second ordre) sous la forme d'état en utilisant le changement de variables (méthode des intégrateurs) suivant :

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t)$$

Ce qui donne

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et le critère prend la forme suivante

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt$$

Ce qui correspond aux matrices de pondération suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1$$

Pour le problème de régulation, on a :

$$u(t) = -R^{-1} B^T K x(t)$$

K est la solution de l'équation de Riccati. Comme A, B, Q et R sont constantes et l'horizon de commande est infini, alors l'équation de Riccati est algébrique :

$$A^T K + K A - K B R^{-1} B^T K + Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a-b & b-c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a-b \\ 0 & b-c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b^2 & bc \\ bc & c^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-b^2 + 1 = 0 \quad (8)$$

$$a - b - bc = 0 \quad (9)$$

$$2(b - c) - c^2 = 0 \quad (10)$$

$$(8) \Rightarrow b = \pm 1$$

$$(10) \Rightarrow \text{pour } b = -1 \text{ on a } c = 0 \text{ ou } c = -2 \quad (11)$$

$$(10) \Rightarrow \text{pour } b = 1 \text{ on a } c = 0 \text{ ou } c = 2 \quad (12)$$

$$(9) \Rightarrow \text{pour } b = -1 \text{ et } c = -2 \text{ on a } a = 1 \quad (13)$$

$$(9) \Rightarrow \text{pour } b = -1 \text{ et } c = 0 \text{ on a } a = -1 \quad (14)$$

$$(9) \Rightarrow \text{pour } b = 1 \text{ et } c = 0 \text{ on a } a = 1 \quad (15)$$

$$(9) \Rightarrow \text{pour } b = 1 \text{ et } c = 2 \text{ on a } a = 3 \quad (16)$$

En résumé, les quatre solutions de l'équation de Riccati sont :

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Les trois premières solutions sont rejetées car la matrice K , solution de l'équation de Riccati, n'est pas définie positive. Par conséquent, la solution de l'équation de Riccati est :

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

et la commande optimale est :

$$u(t) = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$u^*(t) = -x_1(t) - 2x_2(t)$$

et en tenant compte du changement de variables utilisé, la commande optimale prend la forme suivante :

$$\boxed{u^*(t) = -x(t) - 2\dot{x}(t)}$$

Exo. 8 Le problème sous la forme discrète est :

$$\min_{u(k)} J(u(k)) = \sum_{k=0}^N [x(k) + u^2(k)] \Delta t$$

sujet à :

$$x(k-1) = x(k) + (x(k) + u(k) + 1) \Delta t$$

$$x(N) = 4$$

$$x(0_e) = 0$$

$$|u(k)| \leq 7$$

— $N = 1$:

$$0 = 2x(1) + u(1) + 1 \Rightarrow u^*(1) = -(2x(1) + 1)$$

et

$$J^*(x(1), 1) = 4x^2(1) + 5x(1) + 1$$

$x(1)$	$u^*(1)$	$J^*(x(1), 1)$
1	-3	10
2	-5	27
3	-7	52

— $N = 2$:

En utilisant l'équation fonctionnelle de Belman, il vient :

$$J^*(x(2), 2) = \min_{u(2)} [x(2) + u^2(2) + J^*(x(1), 1)]$$

$x(2)$	$u(2)$	$x(1) = 2x(2) + u(2) + 1$	$x(2) + u^2(2)$	$J^*(x(1), 1)$	$J(x(2), 2)$
2	-4	1	18	10	28
	-3	2	11	27	38
	-2	3	06	52	58
3	-6	1	39	10	49
	-5	2	28	27	55
	-4	3	19	52	71
4	-7	2	53	27	80
	-6	3	40	52	92

En résumé, on a :

x	$u^*(1)$	$J^*(1)$	$u^*(2)$	$J^*(2)$
1	-3	10	-	-
2	-5	27	-4	28
3	-7	52	-6	49
4	-	-	-7	80

La commande optimale $u^*(k)$ pour transférer le système de l'état initial $x(t_0) = 4$ à l'état final $x(t_f) = 0$ est :

k	$x(k)$	$u^*(k)$	$x(k) + [u^*(k)]^2$
2	4	-7	53
1	2	-5	27
0	0	0	80