Master 1 : INST & ESER

M'sila le 22/01/2019

Solution « Traitement avancé du signal »

Ex#1 :

1- Calcul de $Y(z)$= ?

Puisque $y(n) = x(n) * h(n)$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{avec } |z| > 0$$

Finalement, on trouve

$$Y(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z^2(1-z^{-N})}{(z-1)(z-a)} \quad \text{avec } |z| > 0$$

2- Calcul de $x(n)$= ?

$$X(z) = \frac{z^2}{6z^2-5z+1} = \frac{z^2}{6(z-1/2)(z-1/3)}$$

$$X(z) = \frac{z}{6}\left(\frac{A}{z-1/2} + \frac{B}{z-1/3}\right)$$

$$A = \lim_{z\to 1/2} \frac{z}{z-1/3} = 3$$

$$B = \lim_{z\to 1/3} \frac{z}{z-1/2} = -2$$

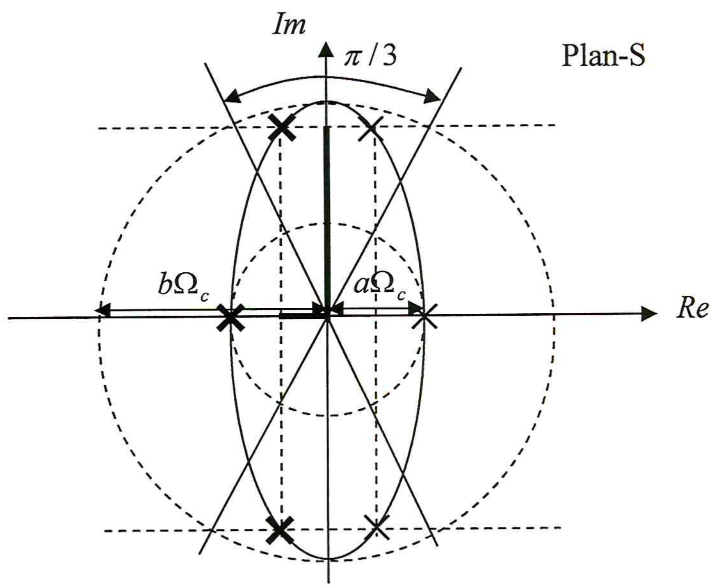
$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1/2} - \frac{1}{3}\frac{z}{z-1/3}$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(n)$$

Ex#2 :

1- Représentation des pôles:

$\Omega_c = 0.86$, $\varepsilon = 0.7$ et N=3



2- Calcul les pôles s_k, k=1, 2, 3 :

$$s_{1,2} = -a\Omega_c \sin(\pi/6) \pm jb\Omega_c \cos(\pi/6)$$

$s_3 = -a\Omega_c$

On calcule d'abord

$$\alpha = \varepsilon^{-1} + \sqrt{1+\varepsilon^{-2}} = 3.1724$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}\left(\alpha^{1/3} - \alpha^{-1/3}\right) = 0.3944 \\ b = \dfrac{1}{2}\left(\alpha^{1/3} + \alpha^{-1/3}\right) = 1.0750 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} s_{1,2} = -0.1696 \pm j0.8006 \\ s_3 = -0.3392 \end{cases}$$

3- Calcul de $H_a(s)$:

Puisque N est impair,

$$H_a(s) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{-s_k}{s-s_k} = \frac{-0.3392\left(0.1696^2 + 0.8006^2\right)}{(s^2 - (s_1+s_2)s + s_1 s_2)(s - s_3)} = \frac{-s_1 s_2 s_3}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

$$= \frac{-0.2272}{(s^2 + 0.3392s + 0.6667)(s + 0.3392)}$$

4- Calcul de $H(z)$ par la méthode de la transformation bilinéaire :

On remplace $s = 2\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ dans $H_a(s)$

$$H(z) = \frac{-0.2272}{\left(4\dfrac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} + 0.3392.2\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.6667\right)\left(2\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.3392\right)}$$

$$= \frac{-0.2272(1+z^{-1})^3}{\left(4(1-z^{-1})^2 + 0.6784(1-z^{-1})(1+z^{-1}) + 0.6667(1+z^{-1})^2\right)\left(2.3392 - 1.6608z^{-1}\right)}$$

$$H(z) = -0.2272\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{\left(5.3451 - 6.6666z^{-1} + 3.9883z^{-2}\right)\left(2.3392 - 1.6608z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{0.2272 - 0.4544z^{-1} + 0.2272z^{-2}}{-12.5033 + 24.4717z^{-1} - 20.4013z^{-2} + 6.6238z^{-3}}$$

5- L'amplitude et la phase de ce filtre numérique :

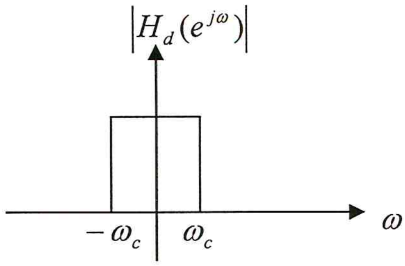
On remplace, $z = e^{jw}$, on écrit $H(e^{j\omega})$ sous la forme, $H(e^{j\omega}) = \dfrac{a+jb}{c+jd}$ et puis on détermine l'amplitude et la phase par

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} \quad \text{et} \quad \varphi_{H(e^{jw})} = \tan^{-1}(b/a) - \tan^{-1}(d/c)$$

Ex #3 :

N=6 et ω_c=0.2π.

1- Calcul de $h_d(n)$:



$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega. = \frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

où $\alpha = (N-1)/2$=2.5

2- La méthode de fenêtrage sert à obtenir une réponse impulsuionnelle $h(n)$ finie

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

3- Calcul de $h(n)$:

$$h(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-(N-1)/2)]}{\pi(n-(N-1)/2)}\left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right],\ n=0,\ \ldots,\ N\text{-}1$$

N=6; n=0:5;

h=(0.54-0.46*cos(2*pi*n./(N-1))).*sin(0.25*pi*(n-(N-1)/2))./(pi*(n-(N-1)/2))

$h(n)$=[0.0102 0.0683 0.1794 0.1794 0.0683 0.0102] ;

4- L'amplitude à $\omega = 0$:

$$H(z) = 0.0102 + 0.0683z^{-1} + 0.1794z^{-2} + 0.1794z^{-3} + 0.0683z^{-4} + 0.0102z^{-5}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j2.5\omega}\left(0.0102(e^{j2.5\omega} + e^{-j2.5\omega}) + 0.0683(e^{j1.5\omega} + e^{j1.5\omega}) + 0.1794(e^{j0.5\omega} + e^{-j0.5\omega})\right) \\ &= e^{-j2.5\omega}\left(0.0204\cos(2.5\omega) + 0.1366\cos(1.5\omega) + 0.3588\cos(0.5\omega)\right) \end{aligned}$$

à $\omega = 0$, $|H(e^{j\omega})| = 0.0204\cos(2.5\omega) + 0.1366\cos(1.5\omega) + 0.3588\cos(0.5\omega) = 0.5158$

$|H(e^{j\omega})| \neq 1$ car N est petit