Correction de l'examen.

Ex n° 01 :

1/ $y' + y = e^{-x}$ — (1) -

Puisque (1) est une éq. diff linéaire, on pose.

$y = u \cdot v \Leftrightarrow y' = u v' + v u'$. (1)

substitutions dans (1).

$u v' + v u' + u v = e^{-x}$

$u(v' + v) + v u' = e^{-x}$ — (2) - (1)

choisissons v de sorte que

$v' + v = 0 \Leftrightarrow v = e^{-x}$ (1)

substitutions dans (2)

$e^{-x} u' = e^{-x} \Leftrightarrow u = x + C$. (1)

donc $y = e^{-x}(x + C)$.

2/ $$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{2x - 3} \quad \text{— (1)}$$

Pour rendre cette équ. en équ. homogène, faisons le changement de variable.

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$ (1)

substitutions dans (1) -

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + h + 2y_1 + 2k + 1}{2x_1 + 2h - 3}$$

choisissons h et k de sorte que.

$$\begin{cases} h+2k+1=0 \\ 2h-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} h=\frac{3}{2}, \\ k=-\frac{5}{4}. \end{cases}$$ 1

on obtient ainsi l'équation homogène.

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+2y_1}{2x_1} \quad (2).$$

on pose. $u=\frac{y_1}{x_1} \iff y_1=u x_1$.

$$\frac{dy_1}{dx_1}=u+x_1\frac{du}{dx_1}.$$

$$\cancel{u}+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1}{2}+\cancel{u}.$$

$$du=\frac{dx_1}{2x_1}$$

$$u=\frac{1}{2}\ln|x_1|+\frac{1}{2}\ln|C_1|$$ 1

$$u=\ln|C_1\sqrt{x_1}| \Rightarrow 2\frac{y_1}{x_1}=\ln|C_1 x_1|$$

substituons les valeurs de y_1 et x_1.

$$\frac{4y+5}{2x-3}-\ln\left|C_1\left(x-\frac{3}{2}\right)\right|=0.$$

ou encore. $$\frac{4y+5}{2x-3}-\ln\left|x-\frac{3}{2}\right|=C$$ 1

Ex n° 02 : $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$

1) $A = -\dfrac{1}{2}$, $B = C = \dfrac{1}{2}$. 1,5

2) $\int f(x)\,dx = \int \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)dx + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{x-1}$ 1

$= -\dfrac{1}{4}\int \dfrac{2x}{x^2+1}dx + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{x^2+1} + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{x-1}$ 1,5

$= -\dfrac{1}{4}\ln|x^2+1| + \dfrac{1}{2}\arctan x + \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + C$

2

Ex n° 03 : $f(x) = \arctan x$

1) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$. 1

En intégrant :

$$f(x) = f(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$ 1

car $f(0) = \arctan(0) = 0$.

2) $g(x) = \dfrac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) - x}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x}$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2)}{-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^2)}$$ 2

$$= \frac{-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2)}{-\frac{1}{6}\left(1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2)\right)} =$$

$$= -6\left(-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2)\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2)}\right)$$

$$= -6\left(-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{20} + o(x^2)\right)$$ 1

$$= -6\left(-\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{60}\right)x^2 + o(x^2)\right)$$

$$g(x) = 2 - 6 \times \frac{11}{60} x^2 + o(x^2) = 2 - \frac{11}{10} x^2 + o(x^2)$$

donc $\lim_{x \to 0} g(x) = 2$.

1