Université de Saïda Dr Moulay Tahar **2018/2019**
$2^{ième}$ année Licence Maths
Analyse complexe

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE FINALE

Exercice 1 : 4,5 pts=4×0,5+(0,5+4×0,25)+1.

1/ *i)* On a

$$\left(z^2+4z+1\right)^2+(3z+5)^2=0 \iff \left(z^2+(4+3i)\,z+1+5i\right)\left(z^2+(4-3i)\,z+1-5i\right)=0.$$

Les deux solutions de l'équation $z^2+(4+3i)\,z+1+5i=0$ sont $z_1=-3-2i$ et $z_2=-1-i$. D'autre part, on a

$$z^2+(4-3i)\,z+1-5i=0 \iff (\overline{z})^2+(4+3i)\,\overline{z}+1+5i=0.$$

Ainsi, $z_1=-3-2i, z_2=-1-i, z_3=-3+2i, z_4=-1+i$ sont les solutions de l'équation.
ii) Il est clair que 0 est une solution de l'équation $\overline{z}=z^3$. Si $z\neq 0$, alors $|z|=1$; il existe un unique réel $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $z=\exp i\theta$. D'où

$$\overline{z}=z^3 \iff \exp(-i\theta)=\exp(3i\theta) \iff \exp(4i\theta)=1.$$

Donc $\theta\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$. Conclusion : l'ensemble des solutions de cette équation est $\{0,1,i,-1,-i\}$.
2/ Soit $z\in\mathbb{C}-\{1\}$. On a

$$\frac{1+z}{1-z}\in i\mathbb{R} \iff \frac{1+z}{1-z}=-\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \iff \frac{1+z}{1-z}=\frac{1+\overline{z}}{-1+\overline{z}} \iff |z|=1.$$

Exercice 2 : 4,5 pts=(2×0,5+1)+1+1,5

1/ Pour $n=0,1$, on a $A+B=a_0$ et $A\alpha+B\beta=a_1$. Comme α et β sont distinctes, alors la relation $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ est vraie pour $n=0$ et $n=1$ si et seulement si

$$A=\frac{a_1-\beta a_0}{\alpha-\beta} \qquad \text{et} \qquad B=\frac{\alpha a_0-a_1}{\alpha-\beta}.$$

Prenant ses valeurs pour A et B et supposons que pour tout entier $1\leq p\leq n$ on a $a_p=A\alpha^p+B\beta^p$, d'où

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_1a_n+u_2a_{n-1}=u_1\left(A\alpha^n+B\beta^n\right)+u_2\left(A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}\right)\\ &= A\alpha^{n-1}\left(u_1\alpha+u_2\right)+B\beta^{n-1}\left(u_1\beta+u_2\right)=A\alpha^{n-1}\alpha^2+B\beta^{n-1}\beta^2\\ &= A\alpha^{n+1}+B\beta^{n+1}. \end{aligned}$$

2/ La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nz^n$ s'écrit d'après la première question

$$A\sum_{n\in\mathbb{N}}(\alpha z)^n+B\sum_{n\in\mathbb{N}}(\beta z)^n.$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|\alpha| < |\beta|$. Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{|\beta|}$. Pour tout $|z| < \frac{1}{|\beta|}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= A\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha z)^n + B\sum_{n=0}^{+\infty} (\beta z)^n \\
&= \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z} \\
&= \frac{a_0 - a_1 z}{1 - u_1 z - u_2 z^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 : 3,5 pts=1,5+2

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U.

1/ On suppose que l'ouvert U est connexe et que la partie réelle de f est constante sur U. Les conditions de Cauchy-Riemann montre que

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} = 0.$$

Comme U est connexe, ceci prouve que la partie imaginaire de f est constante sur U, on conlut alors que f est constante sur U.

2/ On suppose que : $z \in U \Longrightarrow \overline{z} \in U$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Soit $a \in U$ et z un point assez proche de a, on a

$$\frac{g(z) - g(a)}{z-a} = \frac{\overline{f(\overline{z}) - f(\overline{a})}}{z-a} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{a})}{\overline{z} - \overline{a}}\right)}.$$

Comme la fonction $z \longmapsto \overline{z}$ est continue sur $\mathbb{C}$, on en déduit que g est dérivable au point a et que $g'(a) = \overline{f'(\overline{a})}$. Ce qui montrer que g est holomorphe sur U.

Exercice 4 : 4,5 pts=3×0,5+6×0,5

1/ Le support de γ_1 est le segment de la droite vertical d'équation $x = 1$ reliant le point $(1,0)$ au point $(1,1)$. Le support de γ_2 (respectivement, γ_3) est le demi-cercle supérieur (respectivement, inférieur) du cercle unité.

2/

$$\begin{array}{lll}
\oint_{\gamma_1} \overline{z}dz = -\frac{1}{2} + i, & \oint_{\gamma_2} \overline{z}dz = i\pi, & \oint_{\gamma_3} \overline{z}dz = -i\pi, \\
\oint_{\gamma_1} \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}, & \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z}dz = i\pi, & \oint_{\gamma_3} \frac{1}{z}dz = -i\pi.
\end{array}$$

Exercice 5 : 3 pts

On note Γ le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique. On a

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \left(2 - z + \frac{1}{z}\right)\frac{\exp z}{z}dz &= 2\oint_\Gamma \frac{\exp z}{z}dz - \oint_\Gamma \exp z dz + \oint_\Gamma \frac{\exp z}{z^2}dz \\
&= 2\left(2\pi i \exp 0\right) - 0 + 2\pi i \exp' 0 \\
&= 6\pi i.
\end{aligned}$$