2ième Année licence.
Applications des Maths aux autres disciplines:

Corrigé Type.

Ex 1: 1) (1pt) V = volume du sang dans le corps.
(1pt) $U(t)$ = debit du medicament injecté dans le corps à l'instant t
(1pt) K = constante arbitraire.

(1pt) 2) $Cl = KV$ est la clairance.

3) $c'(t) = \frac{U(t)}{V} - Kc(t) \ldots (E)$

$(E) \Leftrightarrow c'(t)V + VKc(t) = U(t)$. (1pt)

$\Leftrightarrow c'(t)V + Cl\, c(t) = U(t)$

(1pt) (EH): $c'(t)V + Cl\,c(t) = 0$
(1pt) (E_g) $c'(t)V + Cl\, c(t) = U(t)$

$\Rightarrow c(t) = \frac{d}{Cl}\left(1 - e^{-\frac{Cl}{V}t}\right)$ si $t \leq t_0$ (1pt)
et $c(t) = \frac{d}{Cl}\left(e^{\frac{Cl}{V}t_0} - 1\right)e^{-\frac{Cl}{V}t}$ si $t > t_0$ (1pt)

cas $t < t_0$
si $t_0 \to \infty$ alors $\frac{d}{Cl}\left(1 - e^{-\frac{Cl}{V}t}\right) \to \frac{d}{Cl}$. (1pt)

Ex 2: (7pts) 1) Dans le modèle de dynamique de population,
$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cx + dxy \end{cases}$$

(1pt) x représente la population des proies.
(1) y " " " prédateurs.
(1) a est le taux de croissance malthusien des proies en l'absence des prédateurs.
(1) b est le taux de disparition des proies à cause des prédateurs
(1) c est le taux d'apparition des prédateurs en présence des proies.
(1) d est le taux de décroissance malthusien des prédateurs en l'absence des proies.
(1) . Le modèle est appelé modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

3pts 2) Résolution du système:
$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cx + dxy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = x(-c + dy) \end{cases}$$ (1pt)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-c + dy}{a - by}$$

$$\Rightarrow \frac{a - by}{-c + dy}\,dy = dx \Rightarrow \int \frac{a - by}{-c + dy}\,dy = x + K \text{ ; } K \text{ est arbitraire}$$ (1pt)

Ind: $\boxed{\int \frac{-by\,dy}{-c+dy} = \int -b\left(\frac{1}{y} - \frac{d}{-c+dy}\right)dy}$

$$\Rightarrow \frac{a}{d}\ln|-c + dy| + b\ln\left|\frac{-c+dy}{y}\right| = x + K$$

(1pt) $\Rightarrow a\ln|-c + dy| + bd\ln\left|\frac{-c+dy}{y}\right| = dx + K$