Correction de l'examen final 1. (1)

Eq. diff / $3^{ème}$ année licence maths.

Exercice N°1

$$y' - \frac{1}{x}y - y^2 = -9x^2 \quad \text{——— } (E)$$

1) $y = ax$ est solution de (E)

$y' = a$ on remplace dans (E) on a :

(01 pt)

$a = \pm 3$

Alors : $y_0 = 3x$.

2) $y = y_0 - \frac{1}{z} = 3x - \frac{1}{z}$, $y' = 3 + \frac{z'}{z^2}$

en remplaçant dans l'équation (E) on obtient :

$$3 + \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x}\left(3x - \frac{1}{z}\right) - \left(3x - \frac{1}{z}\right)^2 = -9x^2$$

$$z^2\left[\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{z} + 6x\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right] = 0$$

(02 pts)

$$z' + \frac{1}{x}z + 6xz - 1 = 0$$

$$z' + z\left[\frac{1}{x} + 6x\right] = 1. \quad \text{——— } (E_1)$$

3) On résoudre l'équation (E_1) :

$$z' + \left[\frac{1}{x} + 6x\right]z = 0 \quad \text{l'équation homogène.}$$

$$\int \frac{z'}{z} = -\frac{1}{x} - 6x \Rightarrow \underline{z = \frac{K}{x}e^{-3x^2}}$$

$$z' = K'\frac{1}{x}e^{-3x^2} + K\left[-\frac{1}{x^2}e^{-3x^2} - 6e^{-3x^2}\right]$$

$$\int K' = \int x e^{3x^2} \Rightarrow \underline{K = \frac{1}{6}e^{3x^2}}$$

(02 pts)

$$\underline{z = \frac{K}{x}e^{-3x^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{x}}$$

4) On déduire des solution de (F)

On a : $y = y_0 - \frac{1}{z}$

$$y = 3x - \frac{1}{\frac{K}{x}e^{3x^2} + \frac{1}{6x}}$$

01 pt

Alors : $\underline{y = \frac{18xKe^{-3x^2} - 3x}{6Ke^{-3x^2} + 1}}$

Exercice N° 2 :

$$y'' + 3y' + 2y = x^2 + e^{-x} + \sin x.$$

On pose : $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = x^2 \\ y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \\ y'' + 3y' + 2y = \sin x. \end{cases}$

1) On résoudre l'équation homogène :

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$r_1 = -2$; $r_2 = -1$

01 pt

Donc : $y(x) = \underline{\lambda e^{-2x} + \mu e^{-x}}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

a). On pose : $y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

02 pts

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{-3}{2}$, $\gamma = \frac{7}{4}$

Donc la solution particulière : $\underline{y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}}$.

b) La solution particulière de l'équation $y'' + 3y' + 2y = \sin x$

est $\underline{y(x) = \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x}$.

02 pts

c) la solution particulière de l'équation $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

est $\underline{y(x) = x e^{-x}}$

02 pts

Pour conclure les solutions de $y''+3y'+2y = x^2+e^{-x}+\sin x$.

sont $y(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}+\frac{1}{10}\sin x-\frac{3}{10}\cos x+xe^{-x}+\lambda e^{2x}+\mu e^{-x}$;

$y''-2y'+y=e^{x}\ln x$

l'équation homogène :

$y''-2y'+y=0$ $\left\langle \begin{array}{l} r_1=1 \\ r_2=1 \end{array}\right.$

01 pt

donc, $y(x)=\lambda e^{x}+\mu x e^{x}$

on pose : $y(x)=z(x)\,e^{x}$

l'équation en z est donc, $z''=\ln x$.

01 pt

$z(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+c$

une solution particulière est :

$y(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)e^{x}$

la solution générale est donc :

$y(x)=\frac{x^2}{4}e^{x}\left(2\ln x-3\right)+\lambda e^{x}+\mu x e^{x}$.

Exercice N°3 :

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ y' = 2x + y \\ z' = -x + y + z \end{cases} \qquad X' = AX$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda(A) = (3-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda + 2\right]$$

01 pt

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 1 - i \qquad \lambda_3 = 1 + i$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -2-i \end{pmatrix} \qquad V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ -2+i \end{pmatrix}$$

01 pt

la matrice A est diagonalisable : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & (1-i) & 0 \\ 0 & 0 & (1+i) \end{pmatrix}$ 0,5

la matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2i & -2i \\ 0 & -2-i & -2+i \end{pmatrix}$ 0,5

$$Y' = DY \qquad \begin{cases} y_1' = 3y_1 \\ y_2' = (1-i)y_2 \\ y_3' = (1+i)y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda e^{3t} \\ y_2 = \mu e^{(1-i)t} \\ y_3 = \gamma e^{(1+i)t} \end{cases}$$

01 pt

$$X = PY \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2i & -2i \\ 0 & -2-i & -2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{3t} \\ \mu e^{(1-i)t} \\ \gamma e^{(1+i)t} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda e^{3t} + \mu e^{(1-i)t} + \gamma e^{(1+i)t} \\ \lambda e^{3t} + 2i\mu e^{(1-i)t} - 2i\gamma e^{(1+i)t} \\ (-2-i)\cdot\mu e^{(1-i)t} + (-2+i)\gamma e^{(1+i)t} \end{pmatrix}$$

01 pt