Université **Dr. Moulay Tahar** de Saïda **Le** 04/02/2019
Faculté: Des sciences, **Département:** De Mathématiques
Troisièma année Licence en Mathématique **Matière:** Optimisation sans contrainte

Corrigé de l'examen Final

Exercice 1.

Exercice 2. *: (06 points)*

Soit $J(u) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ *où* A *est une matrice symitrique de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $v \in \mathbb{R}^n$,*une fonctionnelle quadratique de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$

1. *Montrer que* J *est convexe ssi* A *est semi définie positive.*(01*pt*)

   Un rapide calcul donne tous $u, v \in \mathbb{R}^n$ *et* $t \in [0, 1]$:

$$J(tu + (1-t)v) - tJ(u) - (1-t)J(v) = \frac{t(t-1)}{2}(A(u-v), u-v)$$

   D'où (a) *et* $(b)\,(01pt)$.

   La question (c) *est une application directe du cours.*(01*pt*)

   s.

   $d)$ *Soient* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *et* $t > 0$:

$$J(u + tv) - J(u) = t(Au - b, v) + \frac{t^2}{2}(Au, u) \tag{1}$$

   S'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ *tel que :* $\forall v \in \mathbb{R}^n, J(u) \leq J(v)$, (1) *donne aprés divisionpar* t

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad (Au - b, v) + \frac{t}{2}(Au, u) \geq 0 \tag{2}$$

   En faisant tendre t *vers 0 on voit que* $(Au - b, v) \geq 0$ *pour tout* v *et donc* $Au - b = 0$

   (l'ensemble $\{w \in \mathbb{R}^n : Aw = b\}$ *n'est pas donc vide ; par conséquent*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0 \quad \frac{t}{2}(Au, u) \geq 0,$$

   ce qui signife que A *est semi-définie positive.*

   positive.

   Réciproquement, on choisit u *dans l'ensemble* $\{w \in \mathbb{R}^n : Aw = b\}$ *qui n'est pas vide.*

   Si de plus A *est semi–définie positive, la relation (1) montre que* $J(u) \leq J(u + tv)$ *pour tout* $v \in \mathbb{R}^n$. $(1pt)$

(a) i. *On écrit*

$$f(x^*) \leq f(x^* + \epsilon h) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), \epsilon h \rangle + |\epsilon h| \varphi(\epsilon h), \text{ avec } \varphi(\epsilon h) \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0.$$

On divise alors par $\epsilon > 0$ *puis en fait tendre* ϵ *vers* 0^+. *En fin , en choisissant dans le développement précédent* $\pm h$ *pour tout* $h \in \mathbb{R}^n$, *la conclusion s'ensuit.* (**1pt**)

(a) ii *On utilise en développement de Taylor-Young à l'ordre 2 et on utilise les memes notations que précédemment. On a:*

$$\begin{aligned} f(x^* + h) &= f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hess\ f(x^*) h, h \rangle + \|h\|^2 \varphi(h) \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2} \langle Hess\ f(x^*) h, h \rangle + \|h\|^2 \varphi(h) \end{aligned}$$

Comme précédemment, on remplace h *par* ϵh, h *quelconque,* ϵ *petit, puis en divise par* ϵ^2 *et en fait tendre* ϵ *vers* 0.(**1pt**)

Exercice 3. (**7pts**)

$$g(x, y) = \frac{\exp(x + y)}{\sqrt{x + y}}$$

1. *Le dénoménateur n'est défini que si* $x + y \geq 0$, *et il ne doit pas s'annuler ce qui interdit* $x + y$ *=0. On a donc* $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$.(**1, 5pt**)
2. D_g *est convexe car c'est un demi plan.*(**1, 5pt**)
3. *Pour tout* $(x, y) \in D_g; g(x, y) \geq 0$ *et* $\ln(g(x, y)) = x + y - \ln\sqrt{x + y} = x + y - \frac{1}{2}\ln(x + y)$
   Or $(x, y) \to x + y$ *est convexe car c'est une fonction affine.* $(x, y) \to \frac{1}{2}\ln(x + y)$ *est convexe car la composée d'une fonction affine par la fonction* $\frac{1}{2}\ln(.)$ *qui est convexe; par la propriété d'addition* $\ln \circ g$ *est convexe et* g *par conséquent aussi convexe sur* D_g.(**2pt**)
4. *On a pour tout* $(x, y) \in D_g$;
   $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{(2x+2y-1)\exp(x+y)}{2(x+y)^{\frac{3}{2}}}$.(**2pt**)

Exercice 4. *Les points critiques:*(**7pt**)

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3cxy, (c \in \mathbb{R})$ (**3pt**)
   On se pose dans le cadre $c \neq 0$, *on calcule le gradient*

   $$\nabla f(x, y) = \left(3x^2 - 3cy, 3y^2 - 3cx\right)$$

   Les poits critiques sont $p_0 = (0, 0)$ *et* $p_c = (c, c)$

   D'aprés les calcules $p_0 = (0, 0)$ *est un point-selle.*

   Et si $c > 0$, $p_c = (c, c)$ *est un point de minimum;*

   si $c < 0, p_c = (c, c)$ *est un point de maximum.*

2. $f(x,y) = x^2 - \cos(y)$ (**2pt**)

   on calcule le gradient

$$\nabla f(x,y) = (2x, \sin y)$$

   Les poits critiques sont toutes les points de la forme $p_k = (0, k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

   Si k *est impair le point* p_k *est un point selle,*

   si k *est pair le point* p_k *est un point de minimum.*

3. $(x,y) = x^2y^2$ (**2pt**)

   on calcule le gradient

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy^3, 3x^2y^2\right)$$

   Les poits critiques sont de la forme $p_h = (0,h)$ $p_k = (k,0)$, *plaçons nous au point critique* $(0,0)$ *leur nature est un point selle.*

   Si k *est impair le point* p_k *est un point selle.*