Master 1. GD.
Analyse Complexe.

Corrigé type

6 pts **Ex1** (Questions de cours).

1) Enonce du théorème de Cauchy pour les fonctions holomorphes:

2 pts Th: Si γ_0 est une courbe fermée dans un domaine simplement connexe D, alors $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = 0$ pour toute fonction f holomorphe dans D.

2) $f = u + iv$, $z = x + iy$.

Condition de Cauchy-Riemann: Si f est dérivable en z, alors: (1pt)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ (1pt) et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \text{ (1pt)}$$

Exemple: $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$. (1 pt)

7 pts **Ex2**: $f = u + iv$ holomorphe (1pt) $\Rightarrow$ f verifie la condition de Cauchy-Riemann. Soit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ (1) \text{ (1pt) et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ (2) \text{ (1pt)}$$

par dérivation de (1) $/_x$ et de (2) $/_y$ on obtient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{ (1pt) et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \text{ (1pt)}$$

En ajoutant membre à membre, il vient:

$$\text{(1pt) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

L'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ est appelé équation de Laplace (1pt) cqfd.

7 pts **Ex3**:

$$f: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{z} \quad \text{holomorphe?}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{C}^*$ (1pt), en effet:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ (1pt)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} \text{ (1pt)}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{z_0 - z}{z z_0} \cdot \frac{1}{z - z_0} \text{ (1pt)}$$

$$= -\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z z_0} = -\frac{1}{z_0^2}. \text{ (1pt)}$$

D'où f est holomorphe (1pt) et $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$. (1pt)