1ère année Master G.D.

ANALYSE FONCTIONNELLE — **CORRIGÉ DE L'EXAMEN FINAL**

Exercice 1 :

1/ Comme $Ae_i=\sum_{k=1}^n a_{ik}e_k$ alors $\langle Ae_i,e_j\rangle=\sum_{k=1}^n a_{ik}\langle e_k,e_j\rangle=a_{ij}$ ✓ (0,5)

Donc $tr(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}=\sum_{i=1}^n\langle Ae_i,e_i\rangle$ ✓ (0,5) ainsi $[\rho(A)]^2=\sum_{i=1}^n\langle {}^tAAe_i,e_i\rangle=\sum_{i=1}^n\langle Ae_i,Ae_i\rangle$ (0,5)

2/ $\rho(A)\geq 0$ ✓ (0,25) et $\rho(A)=0 \Rightarrow \forall i,\ \|Ae_i\|^2=0 \Rightarrow \forall i\ Ae_i=0$ (0,25) $\Rightarrow a_{ij}=\langle Ae_i,e_j\rangle=0,\ \forall i,j$ (0,25)

• $[\rho(\lambda A)]^2=\sum_{i=1}^n\|(\lambda A)e_i\|^2=\lambda^2[\rho(A)]^2$ ✓ (0,25) D'où $\rho(\lambda A)=|\lambda|\rho(A)$ ✓ (0,25)

• $[\rho(A+B)]^2=\sum_{i=1}^n\|Ae_i+Be_i\|^2\leq\sum_{i=1}^n(\|Ae_i\|^2+\|Be_i\|^2+2\|Ae_i\|\|Be_i\|)$ ✓ (0,5)

$=[\rho(A)]^2+[\rho(B)]^2+2\sum_{i=1}^n\|Ae_i\|\|Be_i\|$.

Comme $\left(\sum_{i=1}^n\|Ae_i\|\|Be_i\|\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^n\|Ae_i\|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n\|Be_i\|^2\right)=[\rho(A)\rho(B)]^2$ alors

$\rho(A+B)\leq\rho(A)+\rho(B)$ ✓ (0,5).

3/ Comme $\|(AB)e_i\|^2=\langle A(Be_i),A(Be_i)\rangle\leq\|A\|^2\langle Be_i,Be_i\rangle$ alors

(1) $[\rho(AB)]^2\leq\|A\|^2\sum_{i=1}^n\|Be_i\|^2=[\rho(A)\rho(B)]^2$ (car $\langle Au,Au\rangle=\langle {}^tAAu,u\rangle\leq\rho(A)^2\|u\|^2$)

Exercice 3 :

1/ Comme $(E,\|\cdot\|)$ est un espace de Banach alors $(\mathcal{L}(E),\|\cdot\|)$ est un espace de Banach ✓ (0,5)

On a $\|f^n\|\leq\|f\|^n$, $\forall n$ alors $\left\|\frac{f^n}{n!}\right\|\leq\frac{\|f\|^n}{n!}$ ✓ (0,5) donc la série $\sum\frac{f^n}{n!}$ est absolument convergente ✓ (0,5) mais $\mathcal{L}(E)$ est un Banach donc $\exp(f)$ existe (0,5)

• $\exp(Id_E)=\sum_{n\geq0}\frac{Id_E^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Id_E}{n!}=e\,Id_E$ (1)

2/ Comme $f\circ g=g\circ f$ alors $(f+g)^n=\sum_{k=0}^n C_n^k f^k\circ g^{n-k}$ ✓ (0,5) D'où $\frac{(f+g)^n}{n!}=\sum_{k=0}^n\frac{f^k}{k!}\circ\frac{g^{n-k}}{(n-k)!}$ (0,5)

d'où $\exp(f+g)=\exp(f)\circ\exp(g)$ (0,5)

Exercice 2 :

1/ • $\|f\|\geq0$ car $(1+x^2)|f(x)|\geq0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ✓ (0,25) $\|f\|=0\Rightarrow(1+x^2)|f(x)|=0,\ \forall x\Rightarrow f=0$ ✓ (0,25)

• $\|\lambda f\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}(|x^2+1||\lambda f(x)|)=|\lambda|\|f\|$ ✓ (0,5) • $\|f+g\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)+g(x)|\leq\|f\|+\|g\|$ (0,5)

2/ • L est linéaire car l'intégrale est linéaire ✓ (0,5), L est bien défini car $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ CV ✓ (0,5)

• $|L(f)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\right|\leq\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)|f(x)|\times\frac{dx}{1+x^2}\leq\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right)\|f\|$ ✓ (0,5) $\Rightarrow$ f continue.

• On prend $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, comme $\|f\|=1$ alors $L(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$ donc $\|L\|=\pi$ (1)

Exercice 4 :

• Comme $\dim F\leq 3$ alors $\{1,t,t^2\}$ est une base de F. ✓ (0,5)

On note $\{P_0,P_1,P_2\}$ la base orthonormée associée. On a $P_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓ (0,5)

• $P_1(t)=\sqrt{3/2}\,t$ ✓ (1) et $P_2(t)=\frac12\sqrt{\frac52}(3t^2-1)$ ✓ (1)

On a : $P_F(f)=\langle f,P_0\rangle P_0+\langle f,P_1\rangle P_1+\langle f,P_2\rangle P_2$ ✓ (0,5)

Où :
$$\begin{cases} \langle f,P_0\rangle=\sqrt{2}\,sh1 & ✓\ (0,5)\\ \langle f,P_1\rangle=\sqrt{6}\,e^{-1} & ✓\ (0,5)\\ \langle f,P_2\rangle=\sqrt{10}\,sh1-3\sqrt{10}\,e^{-1} & ✓\ (0,5)\end{cases}$$

Par conséquent :

$$P_F(f)(t)=\frac{15}{2e}-\frac32 sh1+\frac3e t+\frac{15}{2}\left(sh1-\frac3e\right)t^2.$$