

Université Moulay Tahar de Saïda
1ère Année Master Mathématiques – Master Géométrie Différentielle
S2 – EDP1 – Correction – Examen –Juillet 2019

Exercice 1 (06 Points)

(1) 03 points

Nous savons que la solution générale de l'EDP de transport

$$u_x(x, y) + cu_y(x, y) = 0; \quad c > 0,$$

est $u(x, y) = f(y - cx)$ pour $f \in C^1(\mathbb{R})$. **0,50 point**

Donc les solutions de l'EDP $u_x(x, y) + 5u_y(x, y) = 0$, sont $u(x, y) = f(y - 5x)$; $f \in C^1(\mathbb{R})$.

01 point

Maintenant, pour l'EDP

$$u_x(x, y) + yu_y(x, y) = 0,$$

nous pouvons utiliser la méthode géométrique, on trouve $\langle \text{Grad}u(x, y), V(1, y) \rangle = 0$, qui donne $\frac{du}{dv}(x, y) = 0$. **0,50 point** Donc les solutions u sont constantes suivant les courbes caractéristiques d'équation $\xi = ye^{-x}$. En effet; l'EDO: $\frac{dy(x)}{dx} = y$ admet comme solution générale: $y = \xi e^x$. **0,50 point**

Finalement $u(x, y) = g(\xi) = g(ye^{-x})$; $g \in C^1(\mathbb{R})$. **0,50 point**

Remarque: Nous pouvons utiliser la méthode analytique et nous trouverons le même résultat. En effet; on trouve $u_x(x, y) = 0$ et $u(x, y) = f(y - 5x)$; $f \in C^1(\mathbb{R})$ pour l'EDP $u_x(x, y) + 5u_y(x, y) = 0$, et $u(x, y) = g(\xi) = g(ye^{-x})$; $g \in C^1(\mathbb{R})$ pour l'EDP $u_x(x, y) + yu_y(x, y) = 0$,

(2) 03 points

Nous avons le problème de Cauchy

$$(i) \begin{cases} v_t(t, x) + 5v_x(t, x) = 0; & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ v(0, x) = 1 - e^{2x}, \end{cases}$$

implique

$$\begin{cases} v(t, x) = f(x - 5t); & f \in C^1(\mathbb{R}), \\ v(0, x) = 1 - e^{2x}. \end{cases} \quad \mathbf{0, 50\text{point}}$$

On trouve alors, $f(x) = 1 - e^{2x}$, et donc l'unique solution du problème (i) soit $v(t, x) = 1 - e^{2x - 10t}$. **01 point**

Maintenant pour le problème (ii), on trouve

$$(ii) \begin{cases} w(t, x) = g(xe^{-t}); & g \in C^1(\mathbb{R}), \\ w(0, x) = xe^{-x}. \end{cases} \quad \mathbf{0, 50\text{point}}$$

Donc $g(x) = xe^{-x}$. Donc l'unique solution du problème (ii) soit $w(t, x) = xe^{-t} \exp(-xe^{-t})$. **01 point**

Exercice 2 (07 Points) Nous avons le champ de vecteurs $X(t, x) = (1, e^{t-x}); (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*$.

- (1) Les courbes intégrales du champ X sont les courbes $\gamma : t \rightarrow \gamma(t) = (t, x(t))$, où $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) = (1, e^{t-x}) = (1, x'(t))$. D'où, $x'(t) = e^{t-x}$. Cette EDO admet comme solution générale $\xi = e^x - e^t$. **02 points**
- (2) Les solutions de l'EDP de transport $u_t(t, x) + e^{t-x}u_x(t, x) = 0$, sont constantes suivant les courbes d'équation $\xi = e^x - e^t$. Donc elles s'écrivent nécessairement $u(t, x) = f(\xi) = f(e^x - e^t)$ avec $f \in C^1(\mathbb{R})$. **01,50 point**
- (3) Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t(t, x) + e^{t-x}u_x(t, x) = 0; (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*, \\ u(0, x) = 1 + x; x \in \mathbb{R}^*, \end{cases}$$

implique **01,50 point**

$$\begin{cases} u(t, x) = f(e^x - e^t); f \in C^1(\mathbb{R}), \\ u(0, x) = 1 + x; x \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

D'où, $f(e^x - 1) = 1 + x$. **02 points** Il s'ensuit alors que $f(y) = 1 + \ln(y + 1)$, et donc $u(t, x) = 1 + \ln(1 + e^x - e^t)$.

Exercice 3 (07 Points) Nous avons le problème des ondes

$$(P1) \begin{cases} u_{tt}(t, x) - 4u_{xx}(t, x) = 0; t > 0, x \geq 0, \\ u(0, x) = \phi(x), u_t(0, x) = \psi(x); x \geq 0. \end{cases}$$

- (1) Le problème (P1) est mal posé. En effet, c'est un problème des Ondes dans \mathbb{R}_+ avec deux conditions initiales, et pour $x - 2t < 0$; nous avons plusieurs solutions. **02 points**

La solution générale du problème (P1) soit

$$\begin{cases} u(t, x) = \frac{1}{2}(\phi(x + 2t) + \phi(x - 2t)) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \psi(s) ds, & x - 2t \geq 0, \\ u(t, x) = f(x + 2t) + g(x - 2t); & x - 2t < 0. \end{cases}$$

01,50 point

- (2) Le problème suivant

$$(P2) \begin{cases} u_{tt}(t, x) - 4u_{xx}(t, x) = 0; t > 0, x \geq 0, \\ u(0, x) = 1 - 5x + x^2, u_t(0, x) = e^{1-2x}; x \geq 0, \\ u(t, 0) = 0; t > 0, \end{cases}$$

est bien posé. En effet c'est le problème (P1) avec la condition aux limites homogène $u(t, 0) = 0; t > 0$. qui va régler le problème et donne l'unicité. **02 points**

La solution unique du problème (P2) soit

$$\begin{cases} u(t, x) = \frac{1}{2}(\phi(x + 2t) + \phi(x - 2t)) + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \psi(s) ds, & x - 2t \geq 0, \\ u(t, x) = \frac{1}{2}(\phi(x + 2t) - \phi(2t - x)) + \frac{1}{4} \int_{2t-x}^{x+2t} \psi(s) ds, & ; x - 2t < 0. \end{cases}$$

01,50 point

.....