

Examen Final Equations différentielles 2
1 heure 30 minutes

Exercice 1. On considère le système différentiel suivant ;

$$(S1) \begin{cases} (1+t^2)x' - tx - y = 2t^2 - 1, \\ (1+t^2)y' + x - ty = 3t. \end{cases}$$

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de

$$\begin{cases} (1+t^2)x' - tx - y = 0, \\ (1+t^2)y' + x - ty = 0. \end{cases}$$

Le système (S1) s'écrit sous la forme $X' = A(t)X + B(t)$, avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ \frac{-1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 - 1 \\ 3t \end{pmatrix}.$$

On montre que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ sont solutions Linéairement indépendantes du système homogène associé à (S1) c'est à dire

(a)

$$X_1' - AX_1 = 0 \dots\dots\dots 1pt$$

(b)

$$X_2' - AX_2 = 0 \dots\dots\dots 1pt$$

(c)

$$W(X_1, X_2) = 1 + t^2 \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \dots\dots 1pt$$

2. Déterminer la matrice résolvante, et en déduire la solution du système homogène.

(a) La matrice fondamentale est

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \dots\dots 1pt$$

(b) La matrice résolvante est

$$R(t, s) = U(t)[U(s)]^{-1} \quad \text{avec} \quad U(s)^{-1} = \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ s & 1 \end{pmatrix} \dots\dots 1pt$$

Ainsi

$$R(t, s) = \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} 1+ts & -s+t \\ -t+s & ts+1 \end{pmatrix} \dots\dots 2pt$$

pars suite la solution homogène est

$$X_H = R(t, s)\xi = \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} c_1 - sc_2 + t(sc_1 + c_2) \\ -t(c_1 - sc_2) + c_2 + sc_1 \end{pmatrix} \dots\dots 1pt$$

avec $\xi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. c_1, c_2 deux réels.

3. Chercher une solution particulière de (S1).. La solution particulière est

$$X_p = \int_{t_0}^t R(t, s)B(s)ds = \begin{pmatrix} t^3 - t - tt_0^2 + t_0 \\ 2t^2 - t_0^2 + tt_0 \end{pmatrix} \dots 1pt$$

4. En déduire la solution générale. La solution générale alors est

$$X(t) = X_H + X_p$$

C'est à dire

$$X(t) = \frac{1}{1+t_0^2} \begin{pmatrix} c_1 - t_0c_2 + t(t_0c_1 + c_2) \\ -t(c_1 - t_0c_2) + c_2 + t_0c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^3 - t - tt_0^2 + t_0 \\ 2t^2 - t_0^2 + tt_0 \end{pmatrix} \dots 1pt$$

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle d'ordre 3

$$x^{(3)}(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-2t}t.$$

1. Racines de l'équation caractéristique

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

Les racines sont $\lambda_1 = 1$ racine double et $\lambda_2 = -2$ racine simple.....1pt

2. La solution homogène est

$$x_H(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \dots 1pt$$

3. La solution particulière : Posons $x_p(t) = ue^{-2t}$ alors l'équation initiale est équivalente à

$$u''' - 6u'' + 9u' = t \dots 1pt$$

en posant $v = u'$ on obtient une equation différentielle d'ordre 2 avec second membre un polynome de degré 1 ce qui entraine $\tilde{A}$

$$v_p = \frac{1}{9}(\frac{1}{2}t + \frac{2}{3})$$

par suite

$$u_p = \frac{1}{9}(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t)$$

La solution particulière est

$$x_p = (\frac{1}{18}t^2 + \frac{2}{27}t)e^{-2t} \dots 1pt$$

4. La solution générale est

$$x(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-2t} + (\frac{1}{18}t^2 + \frac{2}{27}t)e^{-2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \dots 1pt$$

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle d'ordre 2

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = (1+t)e^{3t}.$$

1. Racines de l'équation caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Les racines sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$1pt

2. La solution homogène est

$$x_H(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \dots 1pt$$

3. La solution particulière : Le second membre est de la forme $p(t)e^{3t}$ avec p un polynome de degré 1, et comme e^{3t} n'est pas solutions de l'équation homogène alors $x_p(t) = Q(t)e^{3t}$ avec $Q(t) = at + b \dots 1pt$
Après calcul, la solution particulière est

$$x_p(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{3t} \dots 1pt$$

4. La solution générale est

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \dots 1pt$$

Bon courage