

ÉPREUVE FINALE

Exercice 1 :

- 1/ En utilisant l'atlas obtenu par la projection stéréographique, montrer que le cercle unité S^1 est une variété différentiable dont vous précisez la dimension.
2/ On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{(U_1^+, \varphi_1^+), (U_1^-, \varphi_1^-), (U_2^+, \varphi_2^+), (U_2^-, \varphi_2^-)\}$, où :

$$\begin{aligned} U_1^+ &= \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}, & U_1^- &= \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}, \\ U_2^+ &= \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}, & U_2^- &= \{(x, y) \in S^1 : y < 0\} \end{aligned}$$

et $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\varphi_1^+ : (x, y) \mapsto y, \quad \varphi_1^- : (x, y) \mapsto y, \quad \varphi_2^+ : (x, y) \mapsto x, \quad \varphi_2^- : (x, y) \mapsto x.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est un atlas différentiable de S^1 .

Exercice 2 :

On note $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel de dimension 1 composé des droites du plan euclidien passant par l'origine d'un repère orthonormé.

- 1/ Montrer que $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ est une variété différentiable de dimension 1.
2/ Montrer que l'application

$$\perp : \underset{D}{\mathbf{P}^1(\mathbb{R})} \longrightarrow \underset{D^\perp}{\mathbf{P}^1(\mathbb{R})},$$

est un difféomorphisme différentiable (la notation $D^\perp$ désigne la droite orthogonale à la droite D).

Exercice 3 :

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère le champ de vecteurs X défini par

$$X : (x, y) \mapsto y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

- 1/ Vérifier que X est un champ de vecteurs linéaire.
2/ Calculer le flot Φ^X du champ de vecteurs X .