1ère année Master G.D.

Épreuve Finale

Corrigé

Exercice 1 : 9 pts

1] • $U_N = S^1 - \{(0,1)\}$, $U_S = S^1 - \{(0,-1)\}$, $\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{x}{1-y}$; $\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{x}{1+y}$

• φ_N est injective car $\varphi_N(x_1,y_1) = \varphi_N(x_2,y_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1-y_1} = \frac{x_2}{1-y_2} \Rightarrow \frac{x_1^2}{(1-y_1)^2} = \frac{x_2^2}{(1-y_2)^2}$ (0,25)

$\Rightarrow \frac{1-y_1^2}{(1-y_1)^2} = \frac{1-y_2^2}{(1-y_2)^2} \Rightarrow \frac{1+y_1}{1-y_1} = \frac{1+y_2}{1-y_2} \Rightarrow y_1 = y_2$. Idem pour φ_S. (0,25)

• φ_N est surjective (0,25) car : $\forall t \in \mathbb{R} : \exists (x,y) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right) \in U_N : \varphi_N(x,y) = t$

φ_S " (0,25) " : $\forall t \in \mathbb{R} : \exists (x,y) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \in U_S : \varphi_S(x,y) = t$

On conclut que φ_N et φ_S sont des bijection.

Comme $\varphi_N(0,-1) = 0 = \varphi_S(0,1)$ alors $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^*$ (0,25) (0,25)

qui est un ouvert de $\mathbb{R}$. D'autre part : (0,25)

$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $t \longmapsto 1/t$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (0,25) (0,25)

Conclusion : (0,25) $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ est un atlas $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 1.

Ainsi S^1 est une variété différentiable de dimension 1.

2] $\varphi_1^+(x_1,y_1) = \varphi_1^+(x_2,y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow \sqrt{1-y_1^2} = \sqrt{1-y_2^2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (0,25)

Même démarche pour montrer que $\varphi_2^+, \varphi_2^-, \varphi_1^-$ sont injectives. (0,25)

$\varphi_1^+(U_1^+) = \varphi_1^-(U_1^-) = \varphi_2^+(U_2^+) = \varphi_2^-(U_2^-) =]-1,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. (0,25) (0,25)

(1,5) On a $U_1^+ \cap U_1^- = U_2^+ \cap U_2^- = \emptyset$ et $U_1^+ \cap U_2^+ \neq \emptyset$, $U_1^- \cap U_2^- \neq \emptyset$, $U_1^+ \cap U_2^- \neq \emptyset$, $U_2^+ \cap U_1^- \neq \emptyset$

(1) • $\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^+) = \varphi_2^+(U_1^+ \cap U_2^+) =]0,1[$ et $\varphi_1^+ \circ (\varphi_2^+)^{-1} = \varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1} : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$

(1) • $\varphi_1^-(U_1^- \cap U_2^-) = \varphi_2^-(U_1^- \cap U_2^-) =]-1,0[$ et $\varphi_1^- \circ (\varphi_2^-)^{-1} = \varphi_2^- \circ (\varphi_1^-)^{-1} : t \mapsto -\sqrt{1-t^2}$

(1) • $\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^-) =]0,1[= -\varphi_2^-(U_1^+ \cap U_2^-)$ et $\varphi_1^+ \circ (\varphi_2^-)^{-1} = -\varphi_2^- \circ (\varphi_1^+)^{-1} : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$.

(1) • $\varphi_2^+(U_2^+ \cap U_1^-) =]0,1[= \varphi_1^-(U_2^+ \cap U_1^-)$ et $\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^-)^{-1} = -\varphi_1^- \circ (\varphi_2^+)^{-1} : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$

L'application $]0,1[\to]0,1[$, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est un difféomorphe $\mathcal{C}^\infty$.

Conclusion : $\mathcal{A}$ est un atlas $\mathcal{C}^\infty$ de S^1

Exercice 2: 6 pts

1) L'espace projectif $P^1(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}/\sim$

où $(x,y)\sim(x',y') \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*: (x',y')=(\lambda x,\lambda y)$.

On note $[x:y]$ la classe d'équivalence de (x,y).

$U=\{[x:y] : x\neq 0\}$ et $V=\{[x:y] : y\neq 0\}$

$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $[x:y]\longmapsto y/x$ (0,5) et $\psi : V\longrightarrow \mathbb{R}$, $[x:y]\longmapsto x/y$. (0,5)

(0,5) • $\varphi([x_1:y_1])=\varphi([x_2:y_2]) \Leftrightarrow y_1/x_1 = y_2/x_2 \Rightarrow y_2=\frac{x_2}{x_1}(y_1) \Rightarrow [x_1:y_1]=[x_2:y_2]$

(0,5) • $\psi([x_1:y_1])=\psi([x_2:y_2]) \Leftrightarrow x_1/y_1 = x_2/y_2 \Rightarrow x_2 = y_2/y_1\, x_1 \Rightarrow [x_1:y_1]=[x_2:y_2]$

(0,5) • φ est surjective car $\forall t\in\mathbb{R}$: $\varphi([1:t])=t$

(0,5) • ψ est surjective car $\forall t\in\mathbb{R}$: $\psi([t:1])=t$.

• $\varphi(U\cap V)=\mathbb{R}^* = \psi(U\cap V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^*$ (0,5)

• $\varphi\circ\psi^{-1} = \psi\circ\varphi^{-1} : t\longmapsto 1/t$ est de classe C^∞ (0,5)

Conclusion: $P^1(\mathbb{R})$ est une variété de dimension 1 et de classe C^∞.

2) On a (0,5) • $\varphi\circ\perp\circ\varphi^{-1}$: ~~$U\cap V$~~ $t\mapsto -1/t$ ~~de class~~ différentiable

(0,5) • $\psi\circ\perp\circ\psi^{-1} = \varphi\circ\perp\circ\varphi^{-1}$ est donc différentiable sur $\mathbb{R}^*$

(0,5) • $\psi\circ\perp\circ\varphi^{-1} : t\longmapsto -t$ est donc différentiable

(0,5) • $\varphi\circ\perp\circ\psi^{-1} = \psi\circ\perp\circ\varphi^{-1}$ est " " .

Comme $\perp^{-1}=\perp$ alors $\perp$ est difféo

Exercice 3: 5 pts

1) (1) $X(\lambda(x,y)+(x',y')) = X(\lambda x+x', \lambda y+y') = (\lambda y+y')\frac{\partial}{\partial x} - (\lambda x+x')\frac{\partial}{\partial y}$

$= \lambda X(x,y) + X(x',y')$.

donc X est linéaire.

2) (4) $\Phi^X : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(t,(x,y)) \longmapsto (x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t)$

est le flot du champ de vecteurs X car $t\mapsto \Phi^X_t(x,y)$ est ~~la solution~~ l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \\ x(0)=x \text{ et } y(0)=y, \end{cases}$$