Corrigé Type
Surfaces paramétrées.

EX 1 :

1) Si $p = p(u,v)$ et $q = q(u,v)$ est une transformation paramétrique admissible, alors on a :

$$E = E^* p_u^2 + 2F^* p_u q_u + G^* q_u^2 \quad 0{,}5$$

$$F = E^* p_u p_v + F^*(p_u q_v + p_v q_u) + G^* q_u q_v \quad 0{,}5$$

$$G = E^* p_v^2 + 2F^* p_v q_v + G^* q_v^2 \quad 0{,}5$$

$$\Rightarrow EG - F^2 = (E^* G^* - F^{*2}) \left(\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)} \right)^2 \quad 0{,}5$$

ce qui implique

$$A = \iint_W \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint_W \sqrt{E^* G^* - F^{*2}} \left(\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)} \right) du\, dv$$

$$= \iint_{W^*} \sqrt{E^* G^* - F^{*2}}\, dp\, dq = A^*. \quad 1$$

2) Un calcul simple nous donne $\varphi_s = \begin{pmatrix} f' \cos\theta \\ f' \sin\theta \\ h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -f \sin\theta \\ f \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_\theta$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow E &= f'^2 + h'^2 = 1 \\ F &= 0 \quad 1{,}5 \\ G &= f^2(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Aire } S = \int_0^L \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, ds\, d\theta \quad 0{,}5$$

$$1\text{pt} \quad \text{Aire } S = 2\pi \int_0^L \sqrt{f^2(s)}\, ds = 2\pi \int_0^L |f(s)|\, ds$$

3) $$A(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_{R_0}^{R} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

$$E = 1 + \frac{a^2}{R^2}, \quad F = 0, \quad G = u^2 \quad 1{,}5$$

$$\Rightarrow A(\mathcal{S}) = \int_0^{2\pi}\int_{R_0}^{R} \frac{u}{R}\sqrt{R^2+a^2}\, du\, dv$$

d'où $A(\mathcal{S}) = \frac{\pi}{R}\left(R^2 - R_0^2\right)\sqrt{R^2+a^2}$ 1,5

<u>Ex2 :</u>

- $\varphi_s = \gamma(t)$ 0,5

  $\varphi_t = s\gamma'(t)$ 0,5

  $\varphi_s \wedge \varphi_t = s\,\gamma(t)\wedge\gamma'(t)$, $\|\varphi_s\wedge\varphi_t\| = |s|\,\|\gamma\wedge\gamma'\|$ 0,5

$\Rightarrow N = \pm \frac{\gamma\wedge\gamma'}{\|\gamma\wedge\gamma'\|}$ 0,5

~~Comme la courbe est plane $\Rightarrow \gamma\wedge$~~

La surface est régulière $\Leftrightarrow \gamma\wedge\gamma' \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

- $E = \|\gamma(t)\|^2$ 0,25 , $F = s\,\gamma\cdot\gamma'$ 0,25 , $G = s^2\|\gamma'(t)\|^2$ 0,25

  $\varphi_{ss} = 0$, $\varphi_{st} = \gamma'(t)$, $\varphi_{tt} = s\gamma''(t)$

  $L = 0$ 0,25 , $M = \frac{(\gamma\wedge\gamma')\cdot\gamma'}{\|\gamma\wedge\gamma'\|} = 0$ 0,25 , $N = s\frac{(\gamma\wedge\gamma')\cdot\gamma''}{\|\gamma\wedge\gamma'\|}$ 0,25

- $K = 0$, $\forall (s,t) \in \mathbb{R}\times I$, avec $s \neq 0$

0,5

<u>EX3 :</u> Posons $T = 1 + u^2 + v^2$

- $E = T^2$, $F = 0$, $G = T^2$ 1,5

- $L = 2$, $M = 0$, $N = -2$ 1,5

- Les courbure principale

$$k_1 = \frac{-2}{T^2} \quad , \quad k_2 = \frac{2}{T^2}$$ 1

La courbure de Gauss : $K = k_1 \cdot k_2 = \frac{-4}{T^4}$ 1

La courbure moyenne $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$ 1

- Comme $H = 0$, Alors la surface d'Enneper est minimale. 1