corrections

Exercice 1 :

1) Il faut que $f \geq 0$ et $\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

La $1^{\text{ière}}$ condition donne $k \geq 0$. Calculons l'intégrale double pour voir quand elle vaut 1 :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^5\int_{-1}^1 k\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)dx\,dy = 1$$

$$= \int_1^5\int_{-1}^1 \frac{k}{x^2}\,dx \int_1^5\int_{-1}^1 k\,y^2\,dx\,dy = 1$$

$$= k\left[\left[\frac{-1}{x}\right]_1^5 \left[y\right]_{-1}^1\right] + k\left[\left[x\right]_1^5 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1\right] = 1$$

$$= \frac{8}{5}k + \frac{8}{3}k = 1$$

$$= \frac{64}{15}k = 1 \implies \boxed{k = \frac{15}{64}}$$

1

2) La densité marginale de X est donnée par :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \geq x \text{ ou } x > 5 \\ \int_{-1}^{1} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)dx & \text{si } 1 < x < 5 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)dy = \frac{15}{64}\left[\frac{1}{x^2}y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1}$$

$$= \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\right)$$

alors : $f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\right) & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 1

La densité marginale de Y est donnée par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y > +1 \text{ ou } y < -1 \\ \frac{15}{64}\int_{x=1}^{x=5}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)dx & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{5} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)dx = \frac{15}{64}\left[\frac{-1}{x}+xy^2\right]_1^5$$

$$= \frac{15}{64}\left(y^2+\frac{1}{5}\right)$$

On a donc $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{15}{64}\left(y^2+\frac{1}{5}\right) & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ 1

3) puisque la densité $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 1

, les variables X et Y ne sont pas indépendantes

4) La densité conditionnelle est donnée par :

$$f_{X/Y=0}(x) = \frac{f(x,0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,0)\,dx} = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\frac{15}{64} \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{16}} & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1

$$= \begin{cases} \dfrac{5}{4x^2} & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

5) La covariance est donnée par : $cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ 0,5

avec :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{15}{32}\left[\ln|x| + \frac{1}{6}x^2\right]_1^5 = \frac{15}{32}(\ln 5 + 4)$$ 0,5

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \frac{15}{32}\left[\frac{y^4}{4} + \frac{1}{10}y^2\right]_{-1}^{1} = 0$$ 0,5

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{15}{64}\left(\int_1^5 \frac{dx}{x}\right)\left(\int_{-1}^{1} y\,dy\right) + \frac{15}{64}\left(\int_1^5 x\,dx\right)\left(\int_{-1}^{1} y^3\,dy\right)$$

$$= \frac{15}{64}\left[\ln|x|\right]_1^5 \left(\frac{y^2}{2}\right)_{-1}^1 + \frac{15}{64}\left[x^2\right]_1^5 \left(\frac{y^4}{4}\right)_{-1}^1 = 0$$ 0,1

On a donc $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$ 0,1

les variable X et Y bien que non indépendantes ont donc une corrélation nulle. 0,1

Exercice 2

1) Considérons un n-échantillon de cette structure. Sa fct de vraisemblance est définie pour tout $\theta > 0$ et tout $(x_1 \ldots x_n)$, tous strictement > 0

par : $L(\theta, x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}\right)$

d'où : $\ln L(\theta, x_1 \ldots x_n) = -n \ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial \ln L(\theta, x_1 \ldots x_n)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, x_1 \ldots x_n)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\theta n + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

1

et comme $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L(\theta, x_1 \dots x_n) < 0$ 0,5

donc l'estimateur de max de vraisemblance est donnée par : $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ 0,1

2) On a : $L(\theta, x_1 \dots x_n) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}\right)$

$$= \frac{1}{\theta^n} \exp\left(-\frac{n\hat{\theta}(x_1 \dots x_n)}{\theta}\right)$$

d'après le théorème de factorisation, $\hat{\theta}$ est un résumé exhaustif puisque : 0,1

$$L(\theta, x_1 \dots x_n) = g(\theta, \hat{\theta}(x_1 \dots x_n))\, h(x_1 \dots x_n)$$

où $g(\theta, \hat{\theta}(x_1 \dots x_n)) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left(\frac{-n\hat{\theta}(x_1 \dots x_n)}{\theta}\right)$ 0,1

et $h(x_1 \dots x_n) = 1$. 0,1

3) comme $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum X_i \Rightarrow E(\hat{\theta}) = E(X) = \theta$ 0,1

et $Var(\hat{\theta}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\theta^2}{n}$ 0,1

on en déduit que $\hat{\theta}$ est sans biais et converge vers θ 1

4) calculons la quantité d'information de Fisher

$$I(X,\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x,\theta)\right]$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(-\ln\theta - \frac{X}{\theta}\right)\right]$$ (1)

$$= E\left[\frac{-1}{\theta^2} + \frac{2X}{\theta^3}\right] = \frac{1}{\theta^2}$$

Donc la quantité d'information de Fisher $I[X_1 \dots X_n, \theta]$, concernant θ fournie par le n-échantillon est (0,5)

$$I(X_1 \dots X_n, \theta) = n\,I(X,\theta) = \frac{n}{\theta^2} = \frac{1}{Var(\hat{\theta})}$$ (0,5)

donc $\hat{\theta}$ est un estimateur efficace. (0,5)

Exercice 3 : on a :

$$\mu \in \left[\bar{X} - \frac{\sigma \cdot 1{,}96}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\sigma \cdot 1{,}96}{\sqrt{n}}\right]$$ (1)

$\bar{X} = \frac{60.000}{50} = 1200$, $n = 50$, $\sigma = 200$

$$\mu \in [1144{,}56 \,,\, 1255{,}44]$$ (1)