1

Examen de la matière Géométrie Différentielle

1

Reponses

EX1: (Sur 06 pts).

1- (Sur 03 pts)

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(u,v) \longmapsto g(u,v) = f(\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, e^{u-v})$.

g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car g est la composée des fonctions f et de $\Phi : (u,v) \longmapsto (\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, e^{u-v})$ et f et Φ sont de classe C^1 (Φ est composée des fonctions C^∞, sin, cos et exp).

2) On applique le théorème de la différentielle des fonctions composées : (Sur 3pts)

$g(u,v) = f \circ \Phi(u,v)$.

$\Rightarrow Dg(u,v) = Df(\Phi(u,v)) \circ D\Phi(u,v)$

pour $(u,v) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ on a : $\Phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (1, 1, 1)$.

$\Rightarrow Dg\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = Df(1,1,1) \circ D\Phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Or $Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

et $D\phi\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Alors : $Dg\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

#

Exercice 2 (sur 8 pts).

1- (Sur 04 pts) $\omega - v\,du$ fermée $\Leftrightarrow d(\omega - v\,du) = 0$

$\Leftrightarrow d\omega = d(v.du)$

$\underset{1.\text{pts}}{-2\,dx\wedge dy} = \underset{1\text{pts}}{dv\wedge du}$

$$= \underbrace{(v'_x u'_y - u'_x v'_y)\,dx\wedge dy + (v'_x u'_z - u'_x v'_z)\,dx\wedge dz + (v'_y u'_z - u'_y v'_z)\,dy\wedge dz}_{1\text{pts}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = v'_x u'_y - u'_x v'_y \\ 0 = v'_x u'_z - u'_x v'_z \\ 0 = v'_y u'_z - u'_y v'_z \end{cases} (S)$$

(le système (S) sur 01pt)

2

2

2) (Sur 04 pts)

le système (S) implique (1pt) $\begin{cases} v'_x \cdot U'_z - U'_x v'_z = 0 \\ v'_y \cdot U'_z - U'_y \cdot v'_z = 0 \end{cases}$ (S')

Ce système en (U'_z, v'_z) est homogène

Car son déterminant est (2pts) $\begin{vmatrix} v'_x & -U'_x \\ v'_y & -U'_y \end{vmatrix} =$

$= -v'_x U'_y + U'_x v'_y = 2 \neq 0.$ (première équation)

Donc le système (S') admet une solution unique et c'est bien la solution (0, 0).

Alors : $\begin{cases} U'_z = 0 \\ v'_z = 0 \end{cases}$ (1 pt)

Donc $U(x, y, z) = U(x, y)$ et $v(x, y, z) = v(x, y)$

Exercice 3 ; (6 pts).

Il s'agit de calculer l'aire de la calotte sphérique déterminée par le paramétrage ?

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3$$
$$(\theta,\varphi) \longmapsto \begin{cases} \Phi(\theta,\varphi) = (2\cos\theta\cos\varphi,\ 2\sin\theta\cos\varphi,\ 2\sin\varphi.) \\ \theta \qquad \varphi \end{cases}$$

2 pts.

Avec $D = [0, 2\pi] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

(Car $z \geq 1 \Rightarrow 2\sin\varphi > 1 \Rightarrow \varphi \geq \frac{\pi}{6}$).

l'aire est défini par : $Aire(\Sigma) = \iint_D \|\vec{N}(\theta,\varphi)\| \, d\theta \, d\varphi$

$$\vec{N}(\theta,\varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\theta,\varphi)$$

2 pts

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin\theta\cos\varphi & 2\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -2\cos\theta\sin\varphi & -2\sin\theta\sin\varphi & 2\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{N}(\theta,\varphi) = (4\cos\theta\cos^2\varphi,\ 4\sin\theta\cos^2\varphi,\ 4\sin\varphi\cos\varphi)$$

$\|\vec{N}(\theta,\varphi)\| = 4\cos\varphi$ (1 pt) $\quad$ ($\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi \geq 0$

Alors ; $Aire(\Sigma) = \iint_{[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} 4\cos\varphi \, d\varphi \, d\theta = 8\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = 4\pi$ (1 pt)