Université de M'sila(2018/2019)
Département des Sciences Techniques
$1^{\text{ière}}$année ST

Le 17/06/2019
Durée: 1^h30mn

Epreuve du $2^{ème}$semestre
Module: **Mathématiques 02**

Exercice 01 (6*pts*)

Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int \frac{1+\ln(x)}{1+x\ln x}dx, \quad J = \int xe^{-x}dx, \quad K = \int \frac{(\ln(x))^5}{x}dx, \quad L = \int \frac{-x+2}{x^2+3x-4}dx$$

Exercice 02 (6*pts*)

Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $-y' + \frac{1}{x}y = -1$

2) $y' + \frac{1}{x}y + y^2 = 0.$

3) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

4) $y'' - 2y' + y = x^2 - 1$

Exercice 03 (8*pts*)

Soient A, B deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A \times B$.
2. Est-ce que B est inversible?
3. Montrer que A est inversibles, puis calculer A^{-1}.
4. En utilisant la matrice inverse, résoudre le système

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = 8 \\ -2x + y - z = 2 \end{cases}$$

.

Université de M'sila(2018/2019)
Département des Sciences Techniques
$1^{\text{ière}}$année ST

Le 17/06/2019
Durée: 1^h30mn

Correction d'examen du $2^{ème}$semestre
Module: **Mathématiques 02**

Exercice 01 (6*pts*)

$I = \int \frac{1+\ln(x)}{1+x\ln x}dx = \int \frac{(1+x\ln(x))'}{1+x\ln x} = \ln(1+x\ln x)+c.$ 0,5 1

$J = \int xe^{-x}dx$, intégration par partie. On pose $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ par suite 0,5

$J = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$ 0,5 0,5

$K = \int \frac{(\ln(x))^5}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln(x))^5 dx = \int (\ln(x))' (\ln(x))^5 = \frac{1}{6}(\ln(x))^6 + c.$ 0,5 0,5 0,5

$L = \int \frac{-x+2}{x^2+3x-4}dx$. Puisque $\frac{-x+2}{x^2+3x-4} = \frac{-x+2}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$ par identification 0,5

on aura $A = \frac{1}{5}$ et $B = \frac{-6}{5}$ d'où $L = \int \frac{\frac{1}{5}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{-6}{5}}{x+4}dx = \frac{1}{5}\ln(x-1) - \frac{6}{5}\ln(x+4) + c.$ 0,5 0,5

Exercice 02 (6*pts*)

1) $-y' + \frac{1}{x}y = -1$. Si on pose $-y' + \frac{1}{x}y = 0$ alors $y' = \frac{1}{x}y$ par suite $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x}dx$ d'où $\ln y = \ln x + \ln\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ donc $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. En d'autre part $y' = \lambda' x + \lambda$, On remplace y, y' dans (1) on obtient $-\lambda' x - \lambda + \frac{1}{x}(\lambda x) = -1$ on aura $\lambda = \ln(x) + c.$. On déduit $y = (\ln(x) + c)\, x$ où $c \in \mathbb{R}$. 0,5 0,5 0,5

2) $y' + \frac{1}{x}y + y^2 = 0$, est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. D'où (3) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{y^2}\right)y' + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}\right) = -1$ On pose $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -y^2 y$, ou encoe $y' = \frac{-1}{y^2}z'$. d'où, l'équation (2) équivaut à $-z' + \frac{1}{x}z = -1$. D'après (1) on déduit $z = (\ln(x) + c)\, x$ où $c \in \mathbb{R}$. Alors $y = \frac{1}{(\ln(x)+c)x}$. 0,5 0,5 0,5

3) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

$y'' - 3y' + 2y = 0$, l'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ ses racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$ d'où $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$,où c_1, c_2 deux constantes réelles. 0,5

puisque $\alpha = -1$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors $y_p = ae^{-x}$ où $a \in \mathbb{R}$ d'où $y_p' = -ae^{-x}, y_p'' = ae^{-x}$. On remplace y_p, y_p', y_p'' dans (3) on obtient $ae^{-x} + 3ae^{-x} + 2ae^{-x} = e^{-x}$, par identification, on aura $a = \frac{1}{6}$, donc $y_p = \frac{1}{6}e^{-x}$. Alors $y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$. 0,5 0,5

4) $y'' - 2y' + y = x^2 - 1.$

$y'' - 2y' + y = 0$, l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ possède une racine double $r_1 = r_2 = 1$, donc $y_h = (c_1 x + c_2)\, e^x$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. 0,5

Puisque $\alpha = 0$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors $y_p = ax^2 + bx + c$ 0,5 où a, b et c dans $\mathbb{R}$, d'où $y_p^{'} = 2ax + b, y_p^{''} = 2a$. On remplace $y_p, y_p^{'}, y_p^{''}$ dans (4) on obtient $2a + -2\,(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 - 1$, par identification, on aura $a = 1$,$b = 4, c = 5$ donc $y_p = \frac{1}{6}e^{-x}$. Alors $y = y_h + y_p = (c_1 x + c_2)\, e^x + x^2 + 4x + 5$. 0,5

Exercice 03 (8*pts*)

1. $A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 15 & -3 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ 2

2. On a $\det(B) = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, donc B est non inversible. 1 0,5

3. $\det(A) = -2 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6$. D'où $\det(A) \neq 0$, par 0,5 conséquent A est inversible. Calculons maintenant A^{-1}.

   On a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,(com\,(A))^t$ avec 0,5

   $com\,(A) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ 0,5

   On aura $(com\,(A))^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   On déduire $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{6} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 0,5

1. En utilisant la matrice A^{-1}, résoudre le système suivant

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = 8 \\ -2x + y - z = 2 \end{cases} \qquad (S)$$

0,5

Ce système (S) peut s'écrire sous forme matricielle $AX = b$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $X = A^{-1}b$ donc $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$.

0,5 1