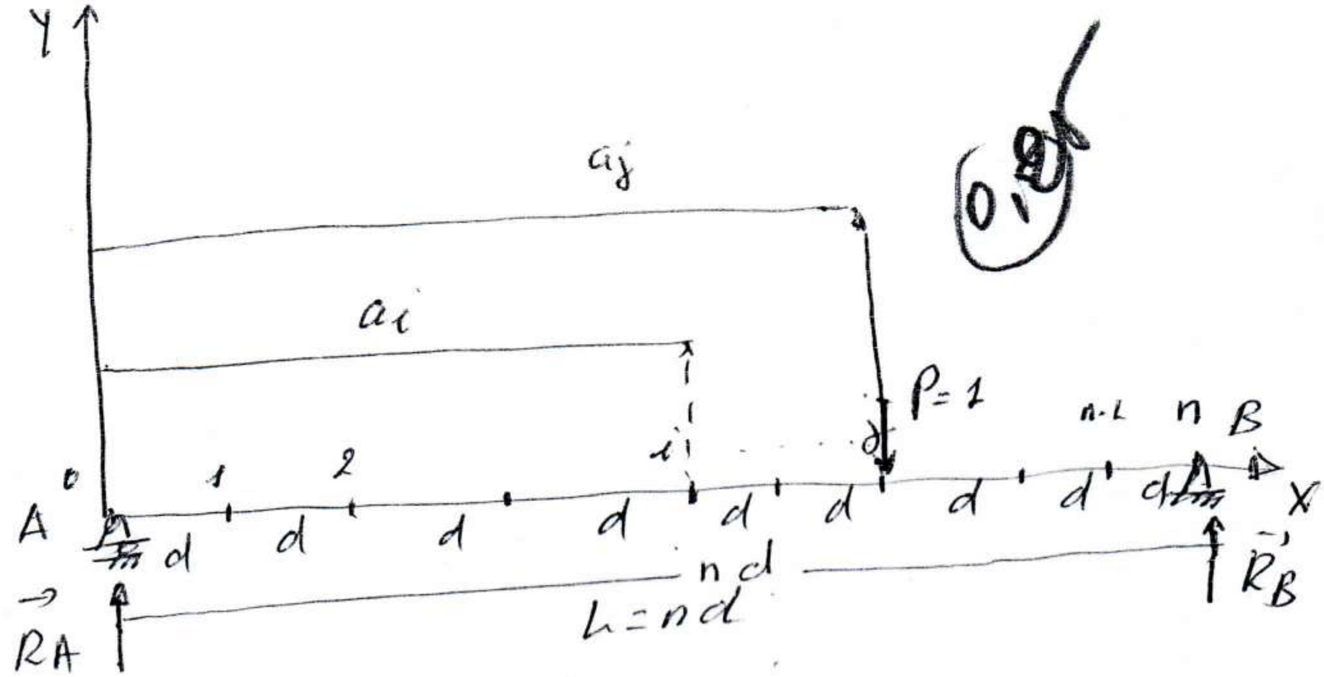
Corrigé DE la variante n° 2

Exo. 1



i - représente la section à étudier
j - représente la position de la charge
a_i - La distance ou l'abscisse de la section à étudier
a_j - La distance ou l'abscisse de la charge.

tel que $a_i = i \cdot d$ et $a_j = j \cdot d$

1- Les matrices d'influence des réactions $M[R_A]$ et $M[R_B]$

Les lignes d'influence des réactions sont:

$$\mathcal{L}[R_A] = \frac{1.(L - a_j)}{L} = \frac{nd - j \cdot d}{nd} = \frac{n-j}{n}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[R_A] = \frac{1}{n}(n-j)} \quad (0,75)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[R_B] = \frac{1 \cdot a_j}{L} = \frac{j \cdot d}{nd} = \frac{1}{n} j} \quad (0,75)$$

d'où la matrice d'influence des réactions est comme suivant:

$$M[R] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[R_A] \\ \mathcal{L}[R_B] \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} \quad \text{avec } 0 \le j \le n$$ 0,5

D'où $$M[R] = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} n & (n-1) & (n-2) & (n-3) & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & (n-2) & (n-1) & n \end{bmatrix}$$

2. Matrice d'influence des moments fléchissants et efforts tranchants.

a- Matrice d'influence des moment fléchissant

Dans le cas, on distingue deux cas, en fonction de la position de la charge par rapport à la section à étudier.

1er cas $i \le j \Rightarrow M[M_s] = R_A \cdot a_i = \frac{1}{n}(n-j)\, i\, d$

0,75 $\Rightarrow \boxed{M[M_s] = \frac{d}{n}\, i\, (n-j)}$ (*)

2e cas $i > j \Rightarrow M[M_s] = R_B\,(L - a_i) = \frac{1}{n}\, j\, (nd - id)$

0,75 $\Rightarrow \boxed{M[M_s] = \frac{d}{n}\,(n-i)\, j}$ (**)

D'où, on peut écrire les deux expressions (*) et (**) comme suivant

1er cas $M[M_s] = \frac{d}{n} I_{n-1}$

2e cas $M[M_s] = \frac{d}{n} I_{n-1}$

$$\text{avec } I_{n-1} = \begin{cases} i(n-j) \rightarrow i \le j \\ (n-i)\, j \rightarrow i > j \end{cases}$$

avec $1 \le i \le n-1$ et $1 \le j \le n-1$

et par conséquent la matrice I_{n-1}

$$I_{n-1} = \begin{bmatrix} \ddots & i(n-j) \\ (n-i)j & \ddots \end{bmatrix}$$ 0,25

D'où, on a :

$$I_{n-1} = \begin{bmatrix} (n-1) & (n-2) & \cdots & 2 & 1 \\ (n-2) & 2(n-2) & \cdots & 4 & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 2 & 4 & \cdots & & (n-2) \\ 1 & 2 & \cdots & (n-2) & (n-1) \end{bmatrix}$$ 0,5

Enfin la matrice d'influence est :

$$M[M_s] = \frac{d}{n} I_{n-1}$$

b - Matrice d'influence des efforts tranchant.

Comme nous savons l'effort tranchant provoque le problème de discontinuité au droit de l'application de la charge $P = 1$ c'est à dire pour $i = j$ et par conséquent $\exists$ deux cas à envisager.

1. cas $i \neq j$

0,25 $$T_s^g = \frac{M_{ij} - M_{(i-1)j}}{d} \quad ; \quad T_s^d = \frac{M_{(i+1)j} - M_{ij}}{d}$$

2. cas $i = j$

0,25 $$T_s^d = \frac{M_{(i+1)j} - M_{ij}}{d} \quad ; \quad T_s^g = \frac{M_{ij} - M_{(i-1)j}}{d}$$

avec $i = 1, 2, \ldots, n$ $(1 \leq i \leq n)$

$j = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ $(0 \leq j \leq (n-1))$.

D'où on peut écrire le système sous la forme matricielle suivante

$$T_{ij} = \frac{1}{d}\left[\ \gamma_s^g \vee \gamma_s^d\ \right] \cdot \left[M_{ij}\right]$$

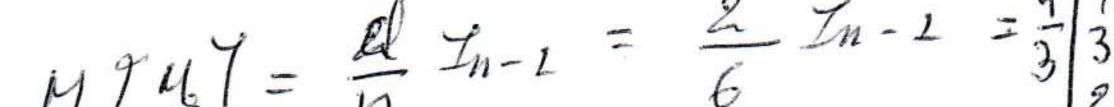
avec $\left[\gamma_s^g\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0,5

et $\left[\gamma_s^d\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & & -1 & 1 \\ & & \cdots & & -1 \end{bmatrix}$ 0,5

<u>Remarque</u> La différence entre T_s^g et T_s^d réside dans la différence des diagonales.

3/ Si $AB = 12{,}00\ m$; $d = 2{,}00\ m$ $\Sigma x_j = 4{,}00\ m$

on a 0,5



$$M\left[M_s\right] = \frac{d}{n} I_{n-2} = \frac{2}{6} I_{n-2} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

~~d'Après les lignes d'influence, on a~~

~~$X < 4{,}00\ m$~~ $\cancel{\mathcal{L}_{M_s} = \left(1 - \frac{X}{12}\right)X_s - 1\left(X_s - X\right)}$ +

~~pour $X_s = 4{,}00\ m$ et $X = 2$~~ $\cancel{\mathcal{L}_{M_s} = 4/3}$.

- Pour les efforts tranchants, on a :

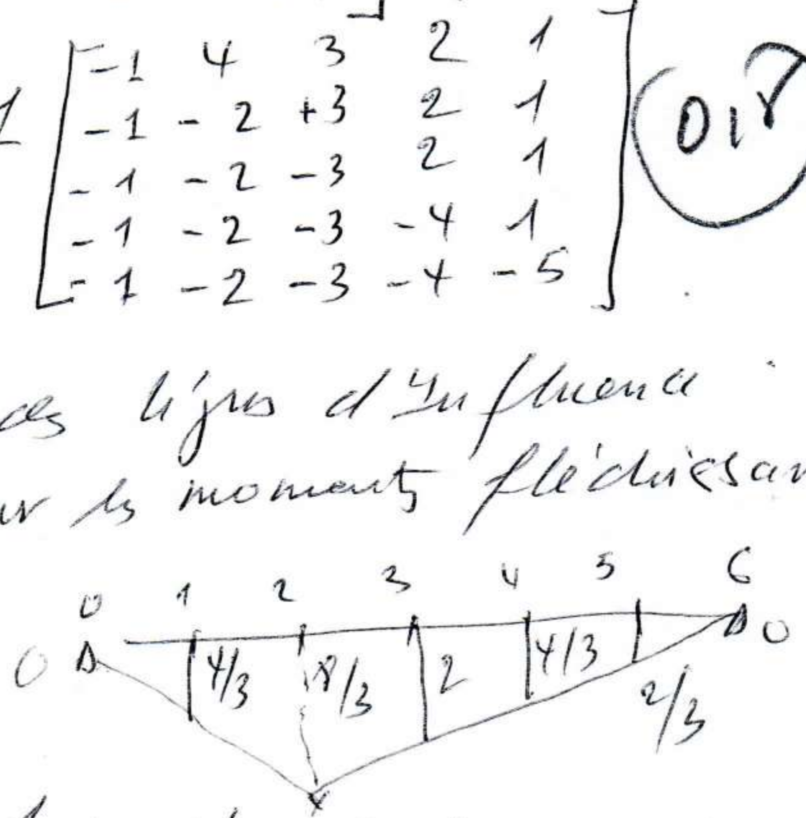
$$T_s^q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{6}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T_s^q = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

or $$T_s^d = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & +3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

4/ tracer des lignes d'influence

a/ Pour les moments fléchissants



D'après le principe des lignes d'influence, on a :

$X \leq 4{,}00\,m$ $\quad \mathcal{L}_{M_s} = \left(1 - \frac{X}{12}\right)X_s - 1\left(X_s - X\right)$.

pour $X_s = 4{,}00\,m$ et $X = 2{,}00\,m$ $\quad \mathcal{L}_{M_s} = 4/3$.

Pour $X \geq 4{,}00\,m$ $\quad \mathcal{L}_{M_s} = \left(1 - \frac{X}{12}\right)X_s$, on a.

$X = 4{,}00\,m \longrightarrow \mathcal{L}_{M_s} = 8/3$ $\quad$ $X = 10{,}00\,m \longrightarrow \mathcal{L}_{M_s} = 2/3$.

$X = 6{,}00\,m \longrightarrow \mathcal{L}_{M_s} = 2$

$X = 8{,}00\,m \longrightarrow \mathcal{L}_{M_s} = 4/3$

Si on revient à la deuxième ligne de la matrice d'influence $M[M_S]$, on trouve que les ordonnées φ_{M_S} pour $X_S = 4{,}00\,m$ sont

$$\frac{1}{3}(4;8;6;4;2) = (4/3, 8/3, 2, 4/3, 2/3)$$

qui vérifie les résultats de la $\mathcal{L}_S$ ($L.I$ de la section S).

b/ Les efforts tranchants

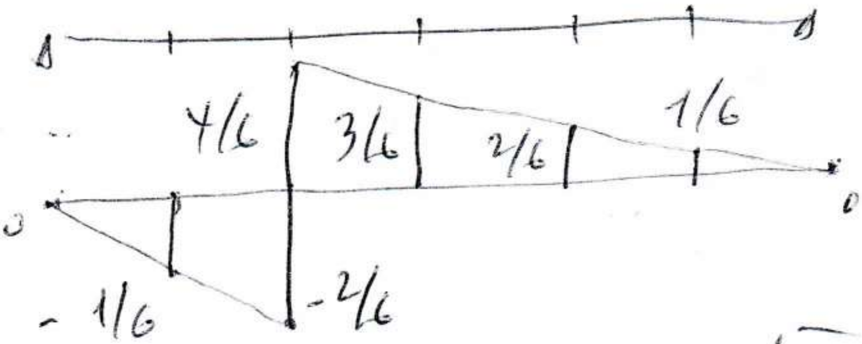
Les résultats obtenus à partir des lignes d'influence $(L.I)_S$, on a :

$$X \le 4{,}00\,m \quad \varphi_{T_S} = \left(1 - \frac{X}{12}\right) - 1 = -\frac{X}{12} \quad \left| \begin{array}{l} X = 2 \rightarrow -1/6 \\ X = 4 \rightarrow -2/6 \end{array} \right.$$

pour

$$X \ge 4{,}00\,m \quad \varphi_{T_S} = 1 - \frac{X}{12} \quad \left| \begin{array}{l} X = 4 \rightarrow 4/6 \\ X = 6 \rightarrow 3/6 \\ X = 8 \rightarrow 2/6 \\ X = 10 \rightarrow 1/6. \end{array} \right.$$

L'épure de L.I des efforts tranchants est



6

Si on revient aux matrices, on trouve :

pour $X \le 4{,}00\,m$, on prend les deux premiers termes de la deuxième ligne de la matrice d'influence T_S qui sont $1/6(-1;-2) = (-1/6;-2/6)$.

pour $X \ge 4{,}00\,m$, on prend de T_S suivant $1/6(4;3;2;1) = (4/6;3/6;2/6;1/6)$

Donc tous les résultats vérifient les résultats obten par les matrices d'Influences: T_s^g et T_s^d

Exercice 2

Pour determiner la longueur d'un câble, on applique la méthode de calcul V.K. KATSURIAE, et par conséquent, on décompose la charge $q(x)$ en deux composantes:

- Suivant la direction $\perp$ à AB 0,25
- Suivant la direction // à AB 0,25

Mais, pour faciliter les calculs, on néglige les effets de la composante // à AB, d'où on a uniquement $q_1(x)$. 0,5

Le câble travaille comme élément souple suspendu aux 2 extrémités de même niveau avec dimensions géométriques:

1 longueur de la travée l_1
2 de flèche y_1
3 élément infiniment petit dx_1 0,25

D'où la longueur du câble est determinée par:

$$L = \int_{l_1} ds = \int_{l_1} \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = \int_{l_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}\, dx_1$$ 1

Comme la flèche est petite $\Rightarrow \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 << 1$

On développe en serie l'expression précédente au voisinage 0, d'où on a

$$\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 = \varepsilon \Rightarrow \sqrt{1+\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \dots$$ 1

D'où on a $\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2$ (1)

$$\Rightarrow \quad L = \int_{l_1} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy_1}{dx_1} \right)^2 \right] dx_1 . \quad (*)$$

Sachant que $\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{Q_1}{H_1}$; (0,5)

avec Q_1 - effort tranchant d'une poutre simplement appuyée correspondante de longueur l_1

H - Tension horizontale du câble.

Si on remplace l'expression dy_1/dx_1 par sa valeur dans l'expression $(*)$, on obtient

$$L = \int_{l_1} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{H_1} \right)^2 \right] dx_1 \quad (0,25)$$

avec $H_1 = cte$

$$L = l_1 + \frac{1}{2H_1^2} \int Q_1^2 dx_1 \quad (0,25)$$

avec $l_1 = \dfrac{l}{\cos\beta}$; $y_1 = y\cos\beta$; $Q_1 = Q\cos\beta$; (0,5)

$H_1 = \dfrac{H}{\cos\beta}$; $dx_1 = \dfrac{dx}{\cos\beta}$

d'où on a : $L = \dfrac{l}{\cos\beta} + \dfrac{1}{2H^2} \cos^2\beta \int Q_1^2 dx_1$.

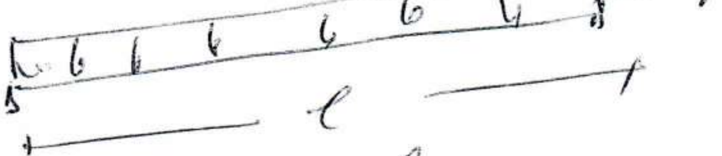
on pose $D = \int Q_1^2 dx_1 = \int Q^2 \cos^2\beta \dfrac{dx}{\cos\beta}$

$$\boxed{D = \int_l Q^2 \cos\beta \, dx} ; \quad (0,75) \quad (2)$$

où D - exprime l'influence de la charge appliquée sur la forme géométrique du câble. (0,5)

Avec $D = ?$

pour une charge uniformément répartie, on a.



$$D = \int_{l_1} Q_1^2 \, dx_1 = \int_0^l Q^2 \cos\beta \, dx .$$

avec $Q(x) = \left(\frac{ql}{2} - qx\right) \Rightarrow Q^2(x) = \frac{q^2l^2}{4} + q^2x^2 - q^2 l x .$

$$D = \cancel{\int_0^l \left(\frac{q^2l^2}{4} + q^2x^2\right)\cos\beta}$$

$$D = \int_0^l \left(\frac{q^2l^2}{4} + q^2x^2 - q^2 l x\right)\cos\beta \, dx .$$

$$D = \left(\frac{q^2l^3}{4} + \frac{q^2l^3}{3} - \frac{q^2l^3}{2}\right)\cos\beta \quad (1)$$

$$\boxed{D = \frac{q^2l^3}{12}\cos\beta}$$

D'où, on a $L = \frac{l}{\cos\beta} + \frac{1}{2H^2}\cos^2\beta \, \frac{q^2l^3}{12}\cos\beta .$

$$L = \frac{l}{\cos\beta} + \frac{1}{24H^2} q^2 l^3 \cos^3\beta \quad (3)$$

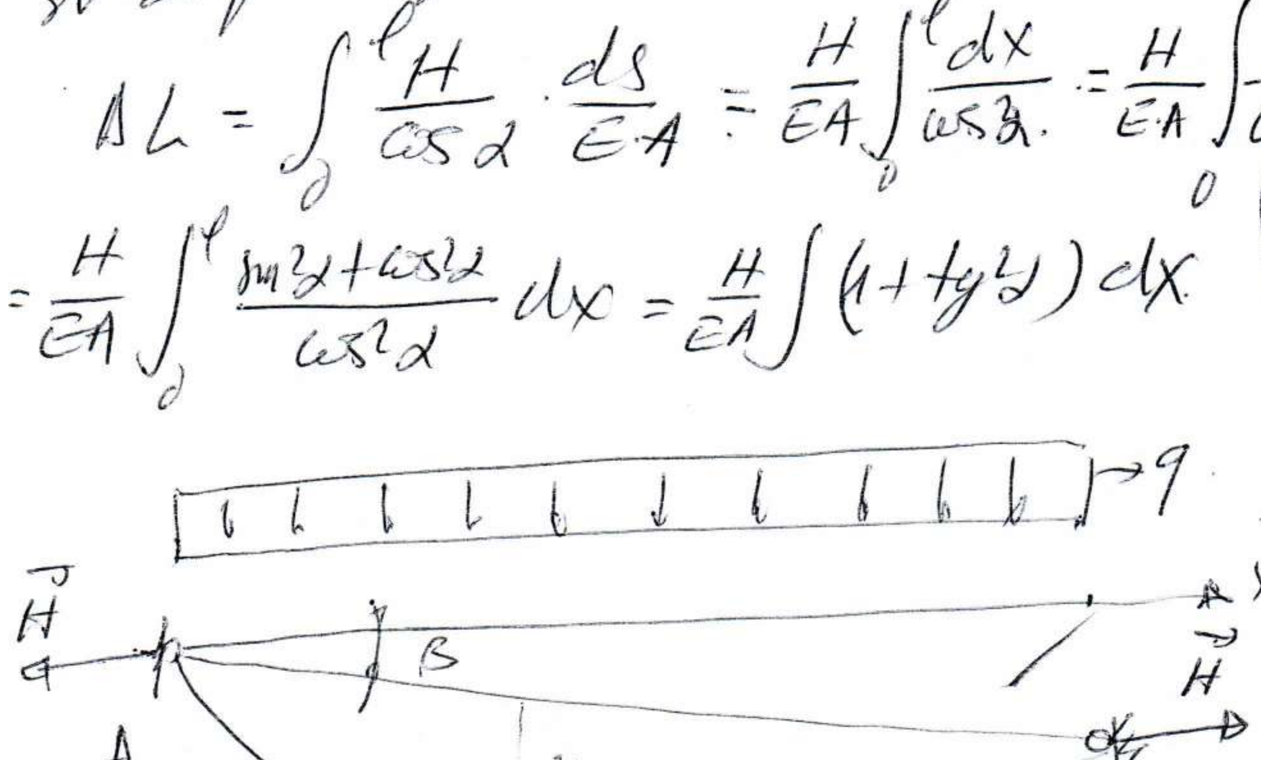
$$\boxed{L = \frac{\ell}{\cos\beta} + \frac{1}{24H^2} q^2 \ell^3 \cos^3\beta}$$

2. Détermination de l'allongement élastique du câble.

L'allongement élastique total du câble se définit par :

$$\Delta L = \int_0^\ell \frac{H}{\cos\alpha} \cdot \frac{ds}{EA} = \frac{H}{EA}\int_0^\ell \frac{dx}{\cos^2\alpha} = \frac{H}{EA}\int_0^\ell \frac{1}{\cos^2\alpha}\, dx \quad (1)$$

$$\Delta L = \frac{H}{EA}\int_0^\ell \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\, dx = \frac{H}{EA}\int (1 + tg^2\alpha)\, dx$$



En introduisant $y' = \frac{dy}{dx} = tg\,\alpha = \frac{Q}{H} + tg\,\beta$

$$\Delta L = \frac{H}{EA}\int_0^\ell \left(1 + \frac{Q^2}{H^2} + 2\frac{Q}{H} tg\,\beta + tg^2\beta\right) dx \quad (4)$$