Chapitre 11

Equations intégrales

Contenu

11.1 Introduction

Les équations intégrales sont a priori moins simples à résoudre que les équations algébriques ou les équations différentielles. Nous allons voir dans ce chapitre que pour des équations intégrales linéaires, une fois réalisée la discrétisation de ces équations, on se ramène au problème de la recherche de solutions d'un système linéaire que nous avons vu chapitre 6.

11.2 Equation de Fredholm

11.2.1 Equation de première espèce

L'équation de Fredholm inhomogène de première espèce est définie par la relation suivante

$$\int_a^b K(t,s)f(s)ds = g(t) \tag{11.1}$$

où $f(t)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer. $g(t)$ est le terme de source et $K(t,s)$ est appelé le noyau.

En notant $g_i = g(t_i)$, $K_{ij} = K(s_i, t_j)$ et $f_j = f(t_j)$ où i est un indice variant de 1 à N et j un indice variant de 1 à M (M peut être différent de N).

L'équation (11.1) se réécrit alors comme

$$\sum_{j=1}^{M} K_{ij} f_j = g_i \tag{11.2}$$

Soit encore sous une forme matricielle

$$K.f = g \tag{11.3}$$

Formellement, si le noyau K n'est pas singulier, la solution existe, est unique et est donnée par la relation

$$f = K^{-1}.g \tag{11.4}$$

11.2.2 Equation de seconde espèce

L'équation de Fredholm inhomogène de deuxième espèce est définie par la relation suivante

$$\lambda f(t) = \int_a^b K(t,s) f(s) ds + g(t) \tag{11.5}$$

où $f(t)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer. $g(t)$ est le terme de source, $K(t,s)$ est appelé le noyau et λ est un scalaire introduit par commodité pour la suite de cette équation.

Suivant le même principe que celui défini ci-dessus, une fois discrétisée, l'équation (11.5) se réexprime comme

$$\lambda f_i = \sum_{j=1}^{M} K_{ij} f_j + g_i \tag{11.6}$$

Soit encore sous une forme matricielle

$$(K - \lambda 1).f = -g \tag{11.7}$$

Si la fonction g est nulle, le problème se ramène à la détermination des valeurs propres de la matrice K, et on parle d'équation de Fredholm homogène. Dans le cas où g est différent de zéro, la solution existe et est unique si λ n'est pas l'une des valeurs propres du noyau, sinon la matrice à inverser $K - \lambda.1$ devient singulière. Si cette dernière est inversible, on a formellement la solution comme

$$f = (\lambda.1 - K)^{-1}.g \tag{11.8}$$

La résolution numérique des équations de Fredholm homogène de première espèce est généralement délicate car le noyau correspond souvent à une matrice presque non inversible (mal conditionnée), c'est-à-dire avec un déterminant voisin de zéro. Corrélativement, si λ est suffisament différent de zéro, la solution des équations de Fredholm de seconde espèce est relativement simple à obtenir.

11.3 Equation de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau K est tel que

$$K(t,s) = 0 \qquad \text{pour } s > t \tag{11.9}$$

11.3.1 Equation de première espèce

L'équation de Volterra homogène de première espèce est définie par la relation suivante

$$g(t) = \int_a^t K(t,s)f(s)ds \tag{11.10}$$

où $f(t)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer. $g(t)$ est le terme de source et $K(t,s)$ est appelé le noyau.

La réécriture matricielle de l'équation de Volterra est identique formellement à celle de Fredholm, mais avec la particularité que la matrice associée au noyau K est une matrice triangulaire inférieure. Ce type d'équations linéaires, comme nous l'avons vu au chapitre 6, peut être résolu par une méthode de substitution. Alors que les équations de Fredholm de première espèce sont généralement mal conditionnées, les équations de Volterra ne le sont pas.

11.3.2 Equation de seconde espèce

De manière similaire, l'équation de Volterra de première espèce inhomogène s'écrit comme

$$\lambda f(t) = \int_a^t K(t,s)f(s)ds + g(t) \tag{11.11}$$

De manière identique, la représentation matricielle de l'équation de Volterra est identique à celle correspondante de Fredholm, seule la structure du noyau K est différente, puisque comme pour toutes les équations de Volterra linéaires, la matrice K triangulaire inférieure.

11.4 Conclusion

L'existence de structure de noyaux presque singuliers nécessite d'utiliser des méthodes plus complexes qui dépassent largement le cadre de ce cours introductif aux méthodes numériques.