Université de Béjaia
Département d'Informatique
$1^{\text{ère}}$ Année Lic.
Durée : 1 h 30 min

8 juillet 2019

Examen de Remplacement d'Algèbre 2

Exercice 1 *(7pts)*

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1/2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

3 1. Calculer AB, $2A + D$, $3A$.

2 2. Calculer A^{-1} par la méthode de Gauss.

2 3. Calculer A^2.

Exercice 2 *(6pts)*

Soit $B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par : $f(x, y) = (7x - 2y, 15x - 4y)$.
Soit $\acute{B} = \{a, b\}$ où $a = 2e_1 + 5e_2$, $b = e_1 + 3e_2$.

2 1. Montrer que $\acute{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

1 2. Déterminer la matrice de passage P de B à $\acute{B}$.

1 3. Calculer P^{-1}.

1 4. Déterminer la matrice $\acute{A}$ de f dans la base $\acute{B}$.

1 5. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$; où A est la matrice de f dans B.

Exercice 3 *(7pts)*

Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :
$f(x, y, z) = (2x - y + z, y - 2z, 2x - z)$.

1 1. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel d'un k-espace vectoriel.

1 2. Montrer que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2 3. Trouver $\ker(f)$, $\operatorname{Im}(f)$.

2 4. Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$.

1 5. Déterminer $\dim(\ker(f))$.

Corrigé : Algèbre 2

Exo 1

1. $AB = \begin{pmatrix} -5 & -13 & \frac{3}{2} \\ 9 & 23 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. 1

$2A + D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ 1

$3A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$ 1.

2. La méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2

3. $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 16 & -21 \\ -28 & 37 \end{pmatrix}$ 2

Ex02

1. Soit $\underline{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{w} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 5 & 3 & y \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2}x + y \end{array}\right) \quad \left(L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{5}{2} L_1\right)$$

De (L_2), on a $\frac{1}{2}\beta = -\frac{5}{2}x + y$

i.e $\beta = -5x + 2y$ ... (1)

De (L_1), on a $2\alpha = -\beta + x$

$$\Rightarrow 2\alpha = 5x - 2y + x$$
$$= 6x - 2y$$

Donc $\alpha = 3x - y$ ... (2)

Alors $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ -5x + 2y \end{pmatrix}$ ... (3)

Donc, $\forall \underline{w} \in \mathbb{R}^2 \; \exists \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tq $\underline{w} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$

i.e. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(\underline{a}, \underline{b})$ ... (4) 1

De (3), on a $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

i.e. $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont lin. indépendants ... (5) A

De (4) et (5) on conclut que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. $$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} [a]_{\mathcal{B}} & [b]_{\mathcal{B}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$ 1

③ $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{2} L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right)$ ③

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 2 L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ 1

④ Nous avons $f(\underline{a}) = f\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= 2\underline{a}$$

$$f(\underline{b}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{b}$$

Alors $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1

$$\begin{matrix} [f(a)]_{B'} & [f(b)]_{B'} \end{matrix}$$

(5) Nous avons $A' = P^{-1} A P$, où $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 15 & -4 \end{pmatrix}$

A : la matrice de f dans B.

Donc $A = P A' P^{-1}$

$$\Rightarrow A^n = P A'^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{n+1} - 5 & -2^{n+1} + 2 \\ 15 \cdot 2^n - 15 & -5 \cdot 2^n + 6 \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1

Exo3

(1) Soit $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

1 On dit qu'un sous-ensemble F de V est un s-ev de V ssi

(1) $\underline{0} \in F$;

(2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall$ $v, w \in F$, alors $\alpha \underline{v} + \beta \underline{w} \in F$.

(2) $\ker(f) = \{ v \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{v}) = \underline{0} \}$

Nous avons $\underline{0} \in \ker(f)$ car $f(\underline{0}) = 0 \ldots$ (*)

1 Soit $v, \underline{w} \in \ker(f)$.

Alors $f(\underline{v}) = \underline{0}$ et $f(\underline{w}) = 0$.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) = \alpha f(\underline{v}) + \beta f(\underline{w})$

$$= \alpha \underline{0} + \beta \underline{0}$$

$$= \underline{0}$$

Alors $\alpha \underline{v} + \beta \underline{w} \in \ker(f) \ldots$ (Δ)

De (*) et (Δ), on conclut que $\ker(f)$ est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

③ Identifiant (x,y,z) avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, f peut s'écrire comme

$$f(\underline{v}) = A.\underline{v}, \quad \text{où} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considérons le système $f(\underline{v}) = \underline{w}$ où $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\underline{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

$$f(\underline{v}) = \underline{w} \Leftrightarrow A\underline{v} = \underline{w}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -2 & \beta \\ 2 & 0 & -1 & \gamma \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -2 & \beta \\ 0 & 1 & -2 & -\alpha+\gamma \end{array}\right) \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-\beta+\gamma \end{array}\right) \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \cdots (\Delta)$$

Alors $f(\underline{v}) = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} t \\ 4t \\ 2t \end{pmatrix}$ pour quelque $t \in \mathbb{R}$.

(Car de L1 nous avons $x = \frac{1}{2}(y - z + \alpha)$
de L2 " " $y = 2z + \beta$
On pose $z = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.)

Donc $\ker(f) = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{v}) = \underline{0} \}$

$\ker(f) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$ 1

$\ker(f) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par (D) ; $f(\underline{v}) = \underline{w}$ a une solution ssi $-\alpha - \beta + \gamma = 0$ (6)

$\Leftrightarrow \gamma = \alpha + \beta$.

Alors $\mathrm{Im}(f) = \{ f(\underline{v}) : \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \{ \underline{w} \in \mathbb{R}^3 : \exists\, \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } f(\underline{v}) = \underline{w} \}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} , \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. 1

(4) Nous avons $\ker(f) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$.

Alors $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\ker(f)$ 1 ..... (A)

Soit $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\underline{a}, \underline{b})$ ..... (3)

$\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont lin. indépendants car $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. (4)

De (3) et (4), on conclut que $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. .... (B) 1

(5) Par (A), $\dim(\ker(f)) = 1$.

1