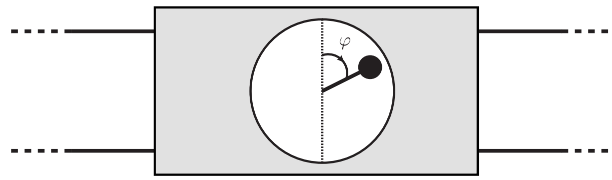
Mécanique Analytique , examen final

Epreuve du 24 juin 2010 ; durée : 2h45 ; sans document ni calculatrice

Exercice 1 : Chariot *(10 points)*



Un chariot de masse M peut glisser sur des rails le long de l'axe x sans friction. A l'extrêmité d'une tige rigide de longeur l et de masse nulle est fixée une masse m. La masse m est plongée dans un potentiel

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} k \cos^2(\varphi)$$

Il n'y a pas de gravité.

1. Quelle est la dimension de la constante k ?
2. Combien de degrés de liberté le système compte-t-il ?
3. Déterminer le Lagrangien.
4. Quelles sont les quantités conservées ? Pourquoi ? Expliciter leur forme.
5. Déterminer les équations du mouvement.
6. A l'aide des quantités conservées, écrire l'équation différentielle satisfaite par φ, *i.e.* cette équation ne doit pas dépendre des autres coordonnées.
7. Faisons maintenant l'hypothèse $M \ll m$, *i.e.* $m + M \simeq m$.
   (a) Déterminer par analyse dimensionnelle la forme de la fréquence d'oscillation de m.
   (b) Réécrire l'équation différentielle satisfaite par φ en tenant compte de cette hypothèse.
   (c) Montrer que cette dernière est une équation du type "oscillateur harmonique" pour $z \equiv \cos(\varphi)$, *i.e.* $\ddot{z} = -\omega^2 z$, dont la fréquence satisfait l'analyse du point (a).
   (d) Considérer les conditions initiales :

$$x_M(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_M(0) = 0 \quad , \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \dot{\varphi}(0) = \alpha\omega$$

   Avec $0 < \alpha < 1$.
      i. Trouver les conditions initiales pour $z(t)$.
      ii. En déduire la trajectoire $z(t)$.
      iii. Ainsi que $\varphi(t)$ et $x_M(t)$.
      iv. Esquisser $\varphi(t)$ pour $\alpha = 0$, 1 et 1/2.

Exercice 2 : Sélection de potentiels *(10 points)*

On considère un système type :

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$$

et on va étudier différents potentiels possibles. Tous les paramètres sont positifs. Pour les esquisses, donner toutes les indications nécessaire à la compréhension (axes, graduation, légende, ...).

I : $V_{\mathrm{I}}(q) = -\alpha \cos\left(\frac{q}{L}\right) + \beta \left(\frac{q}{L}\right)^2$

   (a) On suppose une situation qui admet trois minima. Esquisser le potentiel, et indiquer (sans les calculer), les énergies limite entre les différents régimes.
   (b) Esquisser les orbites représentatives dans l'espace de phase.

II : $V_{\text{II}}(q) = \lambda \left[\tanh\left(\frac{q-a}{L}\right) - \tanh\left(\frac{q+a}{L}\right)\right]$

   (a) Trouver le minimum et les comportements asymptotiques.
   (b) Esquisser le potentiel.
   (c) Identifier les régimes possibles, et esquisser des orbites pour chaque cas dans l'espace de phase.
   (d) Trouver la fréquence d'oscillation autour du minimum, et prendre la limite $a \gg L$.

III : $V_{\text{III}}(q) = +\frac{\alpha}{q^2} - \frac{\beta}{q}$, $q > 0$.

   (a) Esquisser le potentiel.
   (b) Trouver le minimum.
   (c) Esquisser les orbites représentatives dans l'espace de phase.
   (d) Trouver l'équation du mouvement pour q, sans la résoudre.
   (e) Quelques étapes pour donner du sens à ce Lagrangien :
      i. Donner le Lagrangien en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) pour une planète de masse m qui tourne autour un soleil de masse $M \gg m$.
      ii. Trouver l'équation du mouvement selon r.
      iii. Dans l'équation ci-dessus, poser $\theta = \pi/2$, et utiliser la conservation du moment cinétique :

$$L_z = mr^2\dot{\phi}$$

      afin d'obtenir une équation pour r uniquement.
      iv. On trouve la même forme que pour le potentiel initial. Donner la valeur correspondante pour α et β.

Exercice 3 : Physique classique pas classique *(10 points)*

On considère un système physique dont la dynamique est régie par le Hamiltonien suivant :

$$H(p, q, t) = \kappa p^2 q^2 \quad , \quad \kappa > 0$$

1. Ecrire les équations de Hamilton.
2. Retrouver le Lagrangien duquel ce Hamiltonien découle.
3. On aimerait résoudre cet exercice en utilisant la méthode de Hamilton-Jacobi.
   (a) Poser l'équation de Hamilton-Jacobi, en imposant $K(P, Q, t) = 0$.
   (b) Trouver la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi par séparation de variables.
   (c) En déduire la fonction génératrice de type F_2 correspondante, et définir $q(P, Q, t)$ et $p(P, Q, t)$ sachant que :

$$p = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q} \quad , \quad Q = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P}$$

   (d) Vérifier que ces solutions satisfont bien aux équations du mouvement.
   (e) Esquisser quelques orbites dans l'espace de phase.

Mécanique Analytique , Corrigé de l'Examen

Epreuve du 24 juin 2010 ; durée : 2h45 ; sans document ni calculatrice

Exercice 1 : Chariot

1. La constante k a la même dimension que le potentiel et donc $[k] \sim [V] \sim J$.
2. Le système peut être décrit par la position de la masse M (x_M) et l'angle que fait la masse m avec la droite perpendiculaire au rail (φ). Le système compte donc deux degrés de liberté.
3. On repère la position de m par $x_m = x + \alpha + l \sin\varphi$ et $y_m = \beta - l\cos\varphi$. Dès lors

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) - V(\varphi) \\ &= \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + ml\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)\end{aligned} \tag{1}$$

4. Les quantités conservées sont :
   (a) Comme $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, la fonction hamiltonienne $h = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - \mathcal{L}$ est conservée. On trouve aisément :

$$h = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + ml\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \tag{2}$$

   (b) Comme $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, la variable x est cyclique et son impulsion conjuguée $P = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ est conservée. On trouve alors :

$$P = (m+M)\dot{x} + ml\cos\varphi\dot{\varphi} \tag{3}$$

   Remarquez que cette équation s'intègre aisément et donne $x(t) = \dfrac{1}{m+M}\left(Pt + Q - ml\sin\varphi\right)$.

5. L'équation d'Euler-Lagrange pour x donne simplement $P = \text{const}$. Pour φ, on trouve :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml\cos\varphi\dot{x} + ml^2\dot{\varphi}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -ml\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \tag{4}$$

   En effectuant la dérivée, on simplifie l'équation et l'on a :

$$ml\cos\varphi\ddot{x} + ml^2\ddot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \tag{5}$$

6. Afin d'éliminer $\ddot{x}$, dérivons l'équation (3) par rapport au temps et injectons le résultat dans l'équation précédente. On trouve donc :

$$\ddot{x} = \frac{ml}{m+M}\left(\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi}\right) \tag{6}$$

   L'équation différentielle pour φ est donc donnée par :

$$ml^2\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\ddot{\varphi} + \frac{m^2l^2}{m+M}\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \tag{7}$$

   où $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = -k\sin\varphi\cos\varphi$.

7. (a) Les constantes à disposition sont k, l et m, où, on l'a vu, k est mesuré en Joules. On veut exprimer la fréquence $[\omega^2] \sim \text{s}^{-2}$. La seule combinaison est alors :

$$\omega^2 \propto \frac{k}{ml^2} \tag{8}$$

(b) L'équation (7) où l'on pose $M = 0$ devient :

$$\sin\varphi\ddot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\varphi}^2 = \frac{k}{ml^2}\cos\varphi \tag{9}$$

(c) Si $z \equiv \cos\varphi$ satisfait $\ddot{z} = -\omega^2 z$, alors φ satisfait :

$$-\ddot{z} = \sin\varphi\ddot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\varphi}^2 = \omega^2 z = \omega^2\cos\varphi \tag{10}$$

Cette dernière équation est de la même forme que l'équation différentielle pour φ. On en conclut donc que $z(t) = A\cos(\omega t + \zeta)$ et donc que

$$\varphi(t) = \arccos z = \arccos(A\cos(\omega t + \zeta)) \tag{11}$$

où A et ζ sont déterminés par les conditions initiales et où $\omega = \sqrt{\frac{k}{ml^2}}$, conformément au point (a). La solution du problème est donc :

$$\boxed{\varphi(t) = \arccos(A\cos(\omega t + \zeta)) \qquad \text{et} \qquad x(t) = \frac{1}{m}\left(Pt + Q - ml\sin\varphi(t)\right)} \tag{12}$$

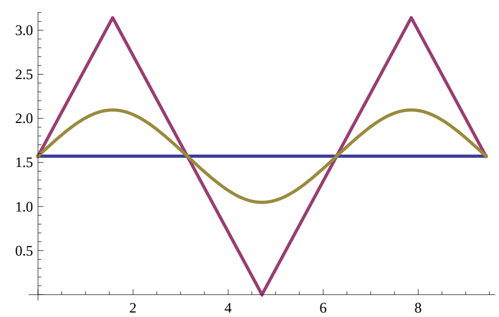
(d) Les conditions initiales doivent nous permettre de déterminer les constantes A, ζ, P et Q.

i. Comme $z = \cos\varphi$, on trouve $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = -\alpha\omega$.

ii. En utilisant $z(t) = A\cos(\omega t + \zeta)$, on détermine $\zeta = \pi/2$ et $A = \alpha$. On peut réécrire la solution $z(t) = -\alpha\sin(\omega t)$.

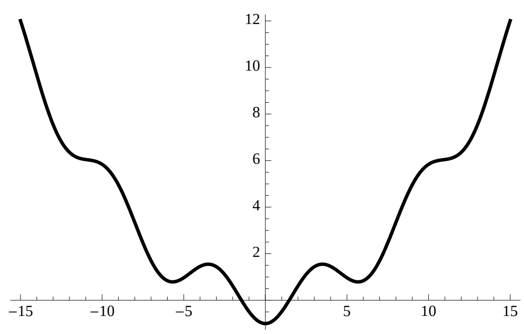
iii. Les conditions initiales impliquent que $P = 0$ et $Q = ml$. On a donc déterminé toutes les constantes dans l'équation (12). Le problème est donc résolu.

iv. Le graphe ci-dessous présente $\varphi(t)$ pour $\alpha = 0$ (en bleu), $\alpha = 1$ (en rouge) et $\alpha = 1/2$ (en jaune) où l'on a utilisé $\omega = 1$.

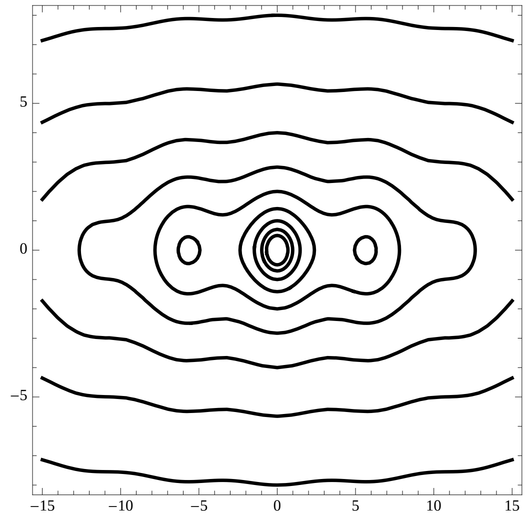


Exercice 2 : Sélection de potentiels

I : (a) Voici le potentiel :



(b) Voici l'espace de phase :

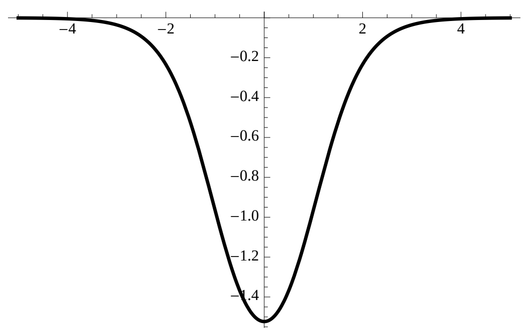


II : (a) On a :

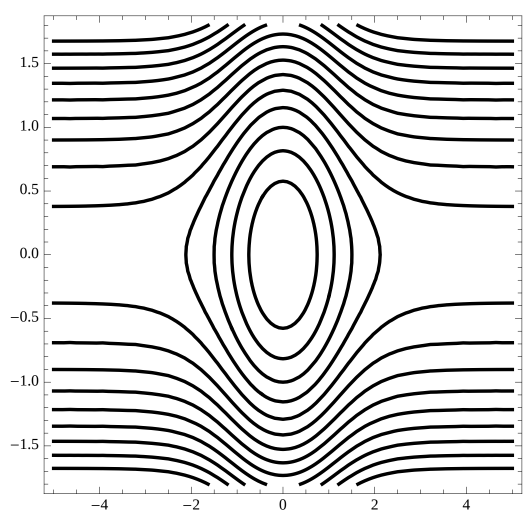
$$V'_{\mathrm{II}}(q) = -\frac{\lambda}{L}\left[\tanh^2\left(\frac{q-a}{L}\right) - \tanh^2\left(\frac{q+a}{L}\right)\right] \tag{13}$$

le minimum se trouve donc en $q = 0$.

(b) Voici le potentiel :



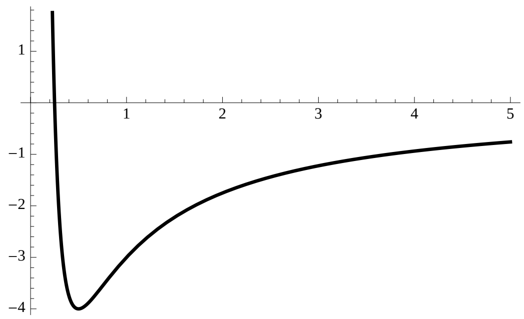
(c) Voici l'espace de phase :



(d) Pour la fréquence on trouve :

$$\omega^2 = \frac{V''_{\mathrm{II}}(0)}{m} = \frac{4\lambda}{mL^2}\tanh\left(\frac{a}{L}\right)\left[1-\tanh^2\left(\frac{a}{L}\right)\right] \overset{a/L\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{14}$$

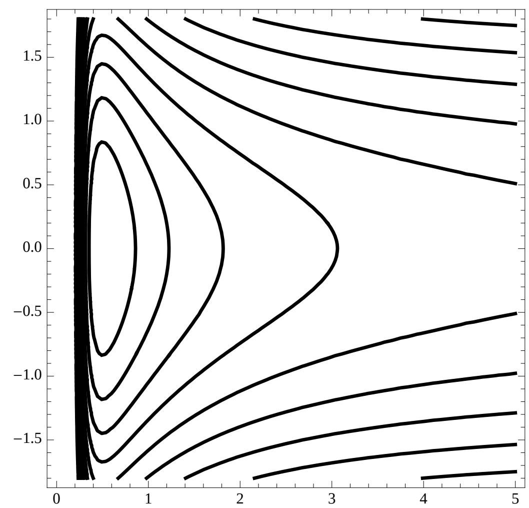
III : (a) Voici le potentiel :



(b) Le minimum est en :

$$q = \frac{2\alpha}{\beta} \tag{15}$$

(c) Voici l'espace de phase :



(d) L'équation du mouvement est donnée par :

$$m\ddot{q} = \frac{2\alpha}{q^3} - \frac{\beta}{q^2} \tag{16}$$

(e) i. Le Lagrangien est donné par :

$$L_{\text{grav}} = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right] + G\frac{Mm}{r} \tag{17}$$

ii. L'équation du mouvement selon r est :

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 - G\frac{mM}{r^2} \tag{18}$$

iii. Dans la configuration demandée on trouve donc :

$$m\ddot{r} = \frac{L_z^2}{mr^3} - G\frac{mM}{r^2} \tag{19}$$

iv. En faisant le lien avec le potentiel donné on trouve :

$$\alpha = \frac{L_z^2}{2m} \qquad , \qquad \beta = GMm \tag{20}$$

Exercice 3 : Physique classique pas classique

On considère un système dont la dynamique est régie par le Hamiltonien suivant :

$$H = \kappa q^2 p^2 \tag{21}$$

1. Les équations de Hamilton sont données par :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2\kappa p q^2 \qquad \text{et} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2\kappa q p^2 \tag{22}$$

2. Pour retrouver le Lagrangien dont découle ce Hamiltonien, il suffit de faire la transformation de Legendre inverse. On trouve donc :

$$\begin{aligned} L(q,\dot{q}) &= p(q,\dot{q})\dot{q} - H(p(q,\dot{q}),q) \qquad \text{où} \qquad p(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}}{2\kappa q^2} \\ &= \frac{\dot{q}^2}{4\kappa q^2} \end{aligned} \tag{23}$$

3. (a) L'équation de Hamilton-Jacobi est donnée par :

$$\kappa q^2 \left(\frac{\partial f_q}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial f_t}{\partial t} = 0 \tag{24}$$

où l'on a séparé $f(q,t) = f_q(q) + f_t(t)$.

(b) On veut maintenant résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi. Le second terme étant le seul à dépendre du temps doit être constant. On a donc $f_t(t) = -\alpha t$. L'équation résiduelle est donc

$$\frac{\partial f_q}{\partial q} = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}}\frac{1}{q} \qquad \to \qquad f_q(q) = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}}\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) \tag{25}$$

(c) La fonction génératrice de type $F_2(q,P,t)$ est donc donnée par :

$$F_2(q,P,t) = -Pt \pm \sqrt{\frac{P}{\kappa}}\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) \tag{26}$$

On en déduit donc :

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \pm\sqrt{\frac{P}{\kappa}}\frac{1}{q} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = -t \pm \frac{1}{2\sqrt{\kappa P}}\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) \tag{27}$$

En inversant la seconde relation on trouve :

$$q(t) = q_0 \exp\left(\pm 2\sqrt{\kappa P}(Q+t)\right) \tag{28}$$

et en injectant cette dernière dans la première on a :

$$p(t) = \pm\frac{1}{q_0}\sqrt{\frac{P}{\kappa}}\exp\left(\mp 2\sqrt{\kappa P}(Q+t)\right) \tag{29}$$

(d) Voyons maintenant si ces solutions sont correctes. Commençons par calculer $\dot{q}(t)$ et $\dot{p}(t)$. On trouve :

$$\dot{q}(t) = \pm 2\sqrt{\kappa P}q(t) \qquad \text{et} \qquad \dot{p}(t) = \mp 2\sqrt{\kappa P}p(t) \tag{30}$$

En utilisant la première équation de (27), on a

$$p(t)q(t) = \pm\sqrt{\frac{P}{\kappa}} \tag{31}$$

En combinant les deux dernières équations on a :

$$\dot{q}(t) = 2\kappa p(t) q(t)^2 \qquad \text{et} \qquad \dot{p}(t) = 2\kappa q(t) p(t)^2 \tag{32}$$

Ces équations coïncident bien avec les équations du mouvement !

(e) Voici le portrait de phase correspondant :