Mécanique des Fluides: Hydrostatique

1. Résolution d'un problème de mécanique des fluides

Comme pour tout problème de mécanique, la résolution d'un problème de mécanique des fluides passe par la **définition d'un système matériel** S, particules fluides à l'intérieur d'une surface fermée limitant S. A ce système matériel S, seront appliqués les principes et théorèmes généraux de mécanique et thermodynamique:

- **principe de conservation de la masse**,
- **principe fondamentale de la dynamique** (efforts + cinématique),
- **principe de conservation de l'énergie**.

Ces principes aboutissent à un certain nombre d'équations qui permettent la résolution d'un problème de mécanique des fluides. Les démonstrations de ces "formules" dépassent le cadre de notre étude. En effet, elles font appels à de nombreux outils mathématiques (différentielle, rotationnel, divergence, laplacien...) et autres réjouissances largement hors programme. Il vous faudra donc, pour l'instant, **admettre** les quelques résultats de la mécanique des fluides. Il faudra faire tout particulièrement attention aux **hypothèses** qui ont permis de mettre en place telle, ou telle autre équation.

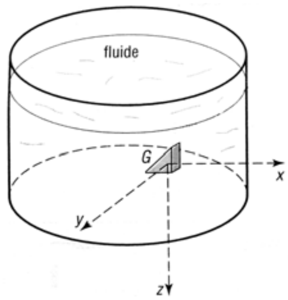
2. Propriétés de la pression en un point d'un fluide

2.1. Propriété 1 :

Les actions ou les forces de pression s'exercent toujours perpendiculairement aux surfaces sur lesquelles elles agissent.

2.2. Propriété 2 : (théorème de Pascal)

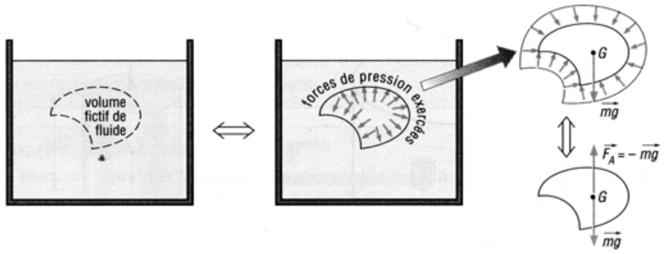
La pression en n'importe quel point d'un fluide est la même dans toutes les directions : verticale, horizontale ou inclinée (quelque soit l'angle d'inclinaison).

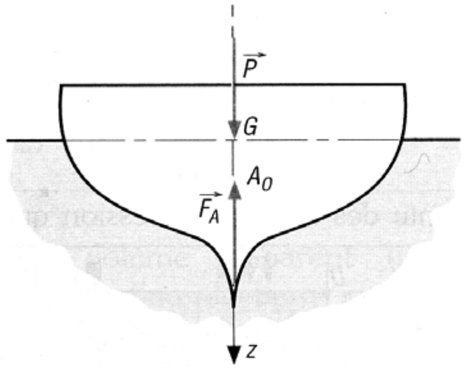


3. Poussé d'Archimède

3.1. Théorème :

La résultante des forces de pression exercées sur la surface un objet complètement immergé, encore appelée poussée d'Archimède, est égale et opposée au poids du volume de fluide déplacé par l'immersion.





4. Hydrostatique

4.1 Définition

L'hydrostatique est l'étude d'un fluide au repos. Elle s'apparente donc à la statique appliquée aux fluides. Cette discipline permet, par exemple, l'étude :

- des corps flottants,
- des barrages, etc...

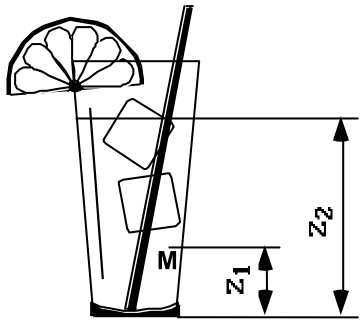
4.2 Equation fondamentale de l'Hydrostatique

Dans le cas de l'hydrostatique, la masse volumique ρ et la température T sont constantes dans tout le fluide. De plus, les **forces extérieures** à distance se réduisent aux **seules forces de pesanteur**. Il est relativement facile de démontrer l'équation fondamentale suivante:

$$P_g = P + \rho.g.z = \text{Constante}$$

avec: P : Pression au sein du fluide (en Pa)
ρ : Masse volumique du fluide (en Kg/m^3)
g : Accélération de pesanteur (9,81 m/s^2)
z : Altitude (en m) du point où l'on mesure P.

La quantité $P + \rho.g.z$ est appelée P_g, **Pression Motrice**. En hydrostatique, la pression motrice P_g est constante et peut être calculée sur la surface libre (en contact avec l'atmosphère) éventuelle du fluide.

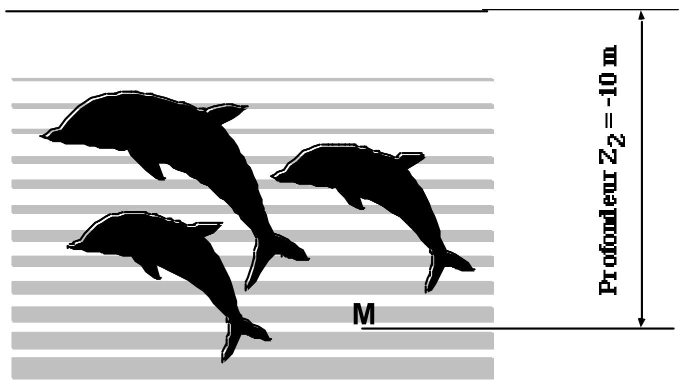


4.3 Interprétation

La surface libre (à la cote Z_2) du fluide est soumise à la pression atmosphérique(1 atm). Le fluide situé au dessus du point M (à la cote Z_1) "pèse" sur le point M. Par conséquent la pression qui règne en M est supérieure à la pression atmosphérique.

5 Exemples d'applications

5.1 Pression dans les fonds sous-marins



Considérons un banc de dauphins qui se promènent à une profondeur de 10 mètres.

A la surface (libre) de la mer, la pression est de 1 atmosphère. L'altitude est de 0 m. Nous considérerons que la masse volumique de la mer est d'environ ρ_{mer} = 1 000 kg/m^3.

En un **point A** de la surface libre de la mer, on peut appliquer l'équation fondamentale de l'hydrostatique :

$P + \rho.g.z = Cte$. On obtient ainsi, l'équation suivante:

$P_A + \rho_{mer}.g.Z_A = Cte$ avec (P_A = 1 atm, Z_A = 0, ρ_{mer} = 1 000 kg/m^3, g = 9,81 m/s^2)

• Appliquons au **point M**, cette même équation. Il vient alors: $P_M + \rho_{mer}.g.Z_M = Cte$. Dans cette équation, la pression P_M est inconnue.

• En *regroupant* ces deux équations, nous obtenons alors:

$$P_A + \rho_{mer}.g.Z_A = P_M + \rho_{mer}.g.Z_M$$

d'où : $$\boxed{P_M = P_A + \rho_{mer}.g.(Z_A - Z_M)}$$

L'application numérique donne : $P_M = 0,1 . 10^6 + 1000 . 9,81 . (0 - (-10)) = 0,198 . 10^6$ Pa

$\underline{P_M = 1,98 \text{ atm}}$

Nous pouvons donc conclure, qu'à chaque fois que nous plongeons de 10 mètres sous la mer, la pression augmente d'une atmosphère.

Pour cette raison, nous comprenons facilement pourquoi il a été nécessaire d'envoyer un "sous-marin de poche" à la place d'un plongeur pour l'observation de l'épave du Titanic située à une profondeur d'environ 4000 mètres. La pression qui règne à cet "endroit" est d'environ 400 fois supérieure à la pression atmosphérique !!! La conception de ce *sous-marin de poche* est, en soi, un exploit technologique.

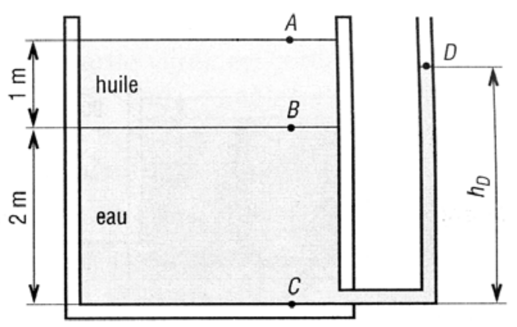
5.2 Constatations

Les conséquences qui découlent de l'équation fondamentale de l'hydrostatique, sont nombreuses et importantes:

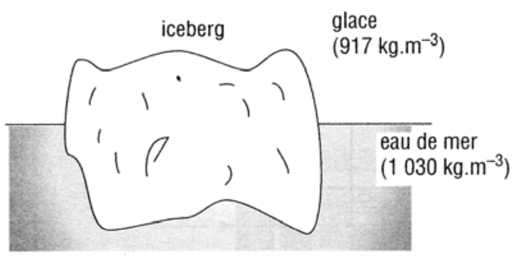
- les **surfaces isobares** (surfaces où la pression reste identique) dans un fluide homogène soumis à l'action de pesanteur **sont des plans**, car P = Cte entraîne Z = Cte,
- la surface de **séparation** de deux fluides de densité différente et non miscibles est un **plan horizontal**,
- la **différence de pression** entre deux points quelconques A et B, pris à l'intérieur du fluide, ne dépend que de la **distance verticale** entre les deux points.

Exercices :

Un réservoir est rempli avec de l'eau (1 000 kg.m^{-1}) sur une hauteur h_{BC} = 2 m et avec de l'huile (870 kg.m^{-3}) sur une hauteur h_{BA} = 1 m. Déterminer la hauteur d'eau h_D dans le tube piézométrique relié à la masse d'eau si : $P_A = P_D = P$ atmosphérique.



Le volume apparent (non immergé) d'un iceberg est de 1 000 m^3 (10 × 10 × 10 m). Déterminer le volume immergé et la masse totale de l'iceberg.



Un parallélépipède (1 000 × 400 × 200) en bois (500 kg.m^{-3}) flotte dans un bassin rempli d'eau (100 kg.m^{-3}), g = 10 m.s^{-2}. **a)** Déterminer la hauteur d'enfoncement h.