Contenu de Module

Généralités

Définitions

- **Signal** : le signal est la représentation physique d'un phénomène qui évolue dans le temps ou dans l'espace.

- **Signal** : vient du latin signe ; variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information.

- **Théorie du signal** : est l'ensemble des outilles mathématiques qui permettent de décrire les signaux émis par une source, ou modifies par un système de traitement.

- **Théorie de l'information** : est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire la transmission de messages véhiculés d'une source vers un destinataire.

- **Traitement du signal** : est l'ensemble des méthodes et des algorithmes qui permet d'élaborer ou d'interpréter les signaux porteurs d'information. Plus précisément :

- élaboration : codage, modulation, changement de fréquence.
- interprétation : décodage, démodulation, filtrage, détection, identification, etc……… ;
- échantillonnage : représentation en temps discret.
- numérisation : par conversion A/N.

Chapitre :1 Rappels des principaux résultats de la théorie du signal

- **Classification des Signaux**

Il existe différents modes de classification :

– **Classification morphologique :** On distingue les signaux à variable continue, des signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.

✓ **Les signaux analogiques** dont l'amplitude et le temps sont continus
✓ **Les signaux quantifiés** dont l'amplitude est discrète et le temps continu
✓ **Les signaux échantillonnés** dont l'amplitude est continue et le temps discret
✓ **Les signaux numériques** dont l'amplitude et le temps sont discrets

– **Classification énergétique :** On distingue

✓ **Les signaux à énergie finie :** ils possèdent une puissance moyenne nulle et une énergie finie.

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

✓ **Les signaux à puissance moyenne finie :** ils possèdent une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisable.

$$0 < P_x = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right] < +\infty$$

– **Classification dimensionnelle**

✓ Signal monodimensionnel 1D
✓ Signal bidimensionnel 2D
✓ Signal tridimensionnel 3D

– **Classification phénoménologique**

On considère la nature de l'évolution du signal en fonction du temps. Il apparaît deux types de signaux :

✓ **Les signaux déterministes :** leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisée par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, les signaux transitoires, etc…

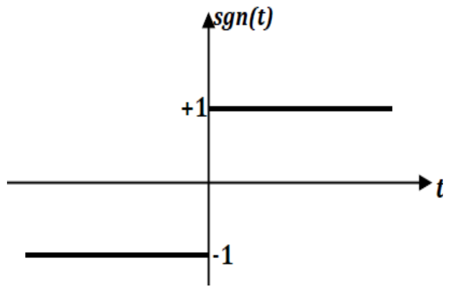
✓ **Les signaux aléatoires :** leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

- **Signaux particuliers**

– fonction signe : notée *sgn(t)*

C'est une fonction réelle de la variable réelle *t* définie par :

$$sgn(t) = \begin{cases} +1 & si\ t > 0 \\ -1 & si\ t < 0 \end{cases}$$



La fonction sgn. est une fonction impaire

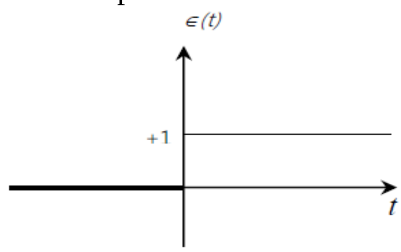
$$sgn(t) = -sgn(-t), \forall t$$

Par convention, on définit : $sgn(0) = 0$

– fonction échelon unité : notée *ε(t) ou u(t)*

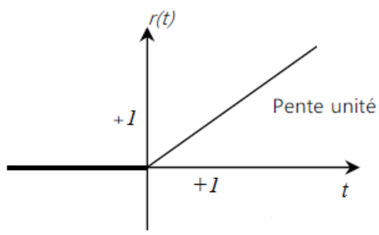
Echelon unité, est une fonction réelle de la variable réelle *t* défini par :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} +1 & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$



– fonction rampe : notée *r(t)* :

$$r(t) = \begin{cases} t & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$

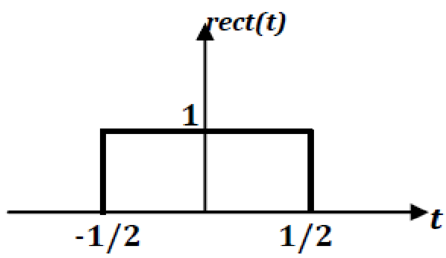


NB : $r(t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(u)du$

– fonction rectangle ou porte : notée *rect* : *Π(t)*

La fonction rectangle unité ou fonction porte, de largeur **1**, est une fonction réelle de la variable réelle ***t*** définie par :

$$rect(t) = \begin{cases} +1\ si\ -\frac{1}{2} \leq t \leq +\frac{1}{2} \\ \quad 0\ ailleurs \end{cases}$$



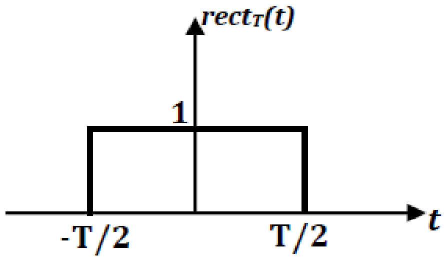
NB : $rect(t) = \varepsilon\left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{1}{2}\right)$

RQ : On remarque que l'aire de la fonction rectangle de largeur unité vaut 1.

➢ La fonction rectangle, ou porte, de largeur T, notée $\boldsymbol{rect_T}$, est une fonction réelle du variable réelle définie par :

$$rect_T(t) = \begin{cases} +1 \; si \; -\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2} \\ 0 \;\; ailleurs \end{cases}$$

$$rect_T(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = \varepsilon(t+\frac{T}{2}) - \varepsilon(t-\frac{T}{2})$$



NB : l'aire de la fonction rectangle de largeur ***T*** vaut ***T***.

– **fonction triangle : notée *Tri(t)* ou *Δ(t)***

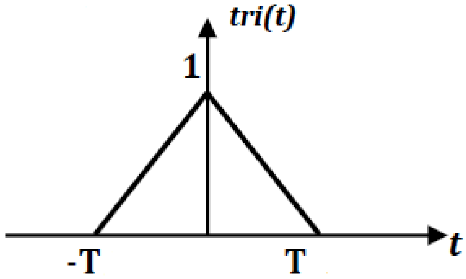
La fonction triangle est une fonction réelle de la variable réelle *t* définie par :

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| \;\; si \; |t| \; \leq 1 \\ 0 \;\; ailleurs \end{cases}$$

NB : l'aire de la fonction triangle unité 1 et la largeur de son support vaut 2.

La fonction triangle de largeur 2T (ou d'aire égale à T) est notée :

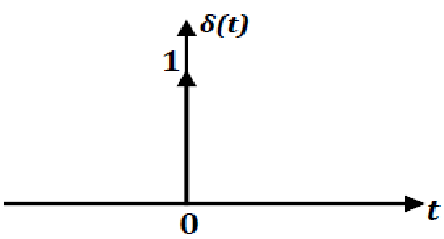
$$tri_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} \;\; si \; |t| \; \leq T \\ 0 \;\; ailleurs \end{cases}$$



– **Impulsion de Dirac : notée *δ(t)***

Impulsion de Dirac, ou distribution de Dirac, vérifie :

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 \;\; si \; t \; = 0 \\ 0 \;\; ailleurs \end{cases}$$

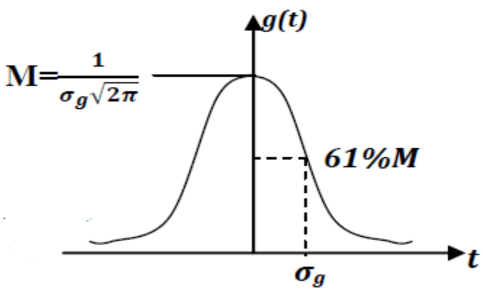


– **la Gaussienne : notée *g(t)***

La Gaussienne ou cloche, définie par :

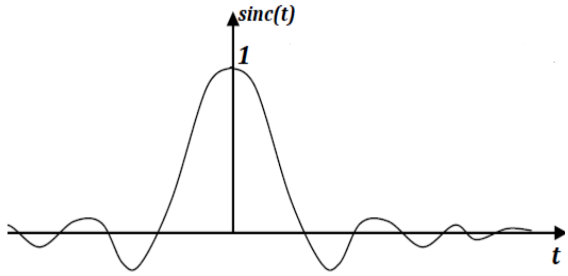
$$g(t) = \frac{1}{\sigma_g\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma_g{}^2}} \rightarrow densité \; de \; probabilité$$

pour les signaux aléatoires



– **sinus Cardinal : notée *sinc(t)***

Cette fonction est définie par :



$$sinc(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$
$$sinc(0) = 1$$

- **<u>Séries et Transformée de Fourier</u>**

– **<u>Série de Fourier</u>** (ou transformée de Fourier pour les fonctions périodiques)

La série de Fourier est un cas particulier de la transformée de Fourier, elle concerne exclusivement les signaux temps continu et périodiques.

Pour tout signal s(t) réel où s(t) = s(t+T_0), on peut écrire :

– **<u>Représentation trigonométrique</u>**

$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(nw_0 t) + B_n \sin(nw_0 t)]$; w_0 : Pulsation propre du signal

$$si\ s(t) est\ paire \rightarrow a_0 = \langle s(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)dt,\ \ a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\cos(nw_0 t)\,dt,\ \ b_n = 0$$

$$si\ s(t) est\ impaire \rightarrow a_0 = 0,\ \ a_n = 0,\qquad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\sin(nw_0 t)\,dt$$

– **<u>Représentation complexe</u>**

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \mathrm{n} f_0 t},\qquad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{n} f_0 t}dt$$

$$c_0 = a_0 = \langle s(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)dt$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\quad ,\qquad \varphi_n = -\arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

– **<u>Théorème de Parseval :</u>**

La relation de Parseval montre qu'il y'a conservation de la puissance *Px* lorsque l'on passe d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle (la série de Fourier permet de calculer la puissance d'un signal temps continu périodique en fonction des coefficients de la série de Fourier) ,

on a : $\boldsymbol{P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |s(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2}$

– **<u>Transformée de Fourier</u>**

<u>Définition</u>

La transformation de Fourier (TF) est une extension de la décomposition en série de Fourier, mais pour des signaux quelconques.

<u>Définition 1</u> : Soit un signal certain *s(t)*, sa TF est une fonction complexe de la variable réelle *f* définie par :

$$S(f) = TF\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2j\pi ft}\,dt$$

S(f) est la superposition d'une infinité de raies qui s'étendent, dans le domaine fréquentiel, de -∞ à +∞.

Définition 2 : On appelle transformée de Fourier inverse (TFI) la relation :

$$s(t) = TF^{-1}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{2j\pi ft}\,dt$$

RQ : la TF de $s(t)\ est\ S(f), \exists$ si $\int s(t)dt\ \exists\ \rightarrow\ s(t)$ est une fonction bornée.

Exple **: soit la fonction *rect* ou porte**

$\boldsymbol{s(t) = rect(\frac{t}{T})}$ **, calculer sa TF.**

$$s(t) = \begin{cases} +1\ si\ -\frac{T}{2} \le t \le +\frac{T}{2} \\ 0\ ailleurs \end{cases}$$

On a

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{j2\pi ft}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}$$

$$= \left[\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j}\right] = \frac{1}{\pi f}\sin(\pi fT) = T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T.sinc(\pi fT)$$

Propriétés

	s(t)	S(F)
Linéarité	$\alpha.s(t) + \beta.r(t)$	$\alpha.S(f) + \beta.R(f)$
Translation	$s(t-t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0}S(f)$
	$e^{2j\pi f_0 t}s(t)$	$S(f-f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}S(\frac{f}{a})$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \bullet R(f)$
	$s(t) \bullet r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	S(t)	s(-f)

- L'égalité de Parseval permet de calculer l'énergie d'un signal temps continu non périodique (la puissance serait nulle) en fonction d'une intégrale sur le module au carré de la transformée de Fourier : $\boldsymbol{P_x = \int_{-\infty}^{+\infty}|s(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|S(f)|^2\,df}$

–T .F .d'un sgn à valeur moyenne non nulle :

$$x(t) = \bar{x} + x_0(t)$$

$\bar{x}$: La valeur moyenne de *x(t)*
$x_0(t)$: Sgn. à valeur moyenne nulle

$$X(f) = \bar{x}\delta(f) + TF\{x_0(t)\}$$

Exemple
Calculer la TF d'un signal périodique

– **Transformée de Fourier et le Produit de Convolution :**

On appelle fonction de convolution du signal s_1(t) et s_2(t) l'intégrale $s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{s_1(\tau)s_2(t-\tau)d\tau}$

Théorème : La TF du produit de convolution est le produit algébrique des TF des signaux du Produit $S(f) = TF\{s_1(t) * s_1(t)\} = \boldsymbol{S_1(f).S_2(f)}$

– Algorithme de Convolution

- Le signal *y(l)* est inversé pour obtenir *y(-l)*
- Le signal *y(-l)* est décalé d'une certaine quantité *k*
- Le produit *x(l)y(k-l)* est effectué échantillon par échantillon pour tous les *k*
- Les valeurs ainsi obtenues sont additionnées

– **Transformée de Fourier et la Corrélation**

Définition

Intercorrélation Soient x(t) et y(t) deux signaux à énergie finie, on appelle fonction d'intercorrélation entre x(t) et y(t) la fonction notée $\Gamma_{xy}(\tau)$ définie par :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)y(t-\tau)\,dt}$$

Autocorrélation Soient x(t)un signal à énergie finie, on appelle fonction d'autocorrélation de *x(t)* la fonction notée $\Gamma_{xx}(\tau)$ définie par :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)x(t-\tau)\,dt}$$

La TF{$\Gamma_{xy}(\tau)$}=$\Phi_{xy}(f) = X(f)Y(f)$ → est la densité inter spectrale d'énergie

La TF{$\Gamma_{xx}(\tau)$}= $\Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2$ $\rightarrow$ est la densité spectrale d'énergie

$\Gamma_{xx}(0) = E = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f)df$, l'auto corrélation en $\tau = 0$ est égale à l'énergie du signal.

– **Signaux à puissance finie**

Fonction d'inter corrélation $\Gamma_{xy}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \boldsymbol{x(t)y(t-\tau)\,dt}$

Fonction d'auto corrélation $\Gamma_{xx}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \boldsymbol{x(t)x(t-\tau)\,dt}$

La TF{$\Gamma_{xy}(\tau)$}= $\Phi_{xy}(f)$ $\rightarrow$ est la densité inter spectrale de puissance

La TF{$\Gamma_{xx}(\tau)$}=$\Phi_{xx}(f)$ $\rightarrow$ est la densité spectrale de puissance

$\Gamma_{xx}(0) = P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f)df$ $\rightarrow$ Puissance moyenne du signal