

## Synthèse des filtres analogiques d'ordre supérieur

On cherche à ce que  $|H(j\omega)|$  soit aussi proche de 1 que possible en **bande passante**, aussi proche de zéro que possible en **bande atténuée**, tout en tolérant une **bande de transition** déterminée dans le cahier des charges. On cherche aussi à obtenir une pente quelconque tout en ayant  $-3\text{dB}$  à  $f_c$ .

Devant ces considérations, une contrainte supplémentaire vient de s'ajouter c'est **le cahier des charges** qui définit les limites acceptable du **gabarit**.

### Gabarit d'un filtre passe-bas

Bande passante

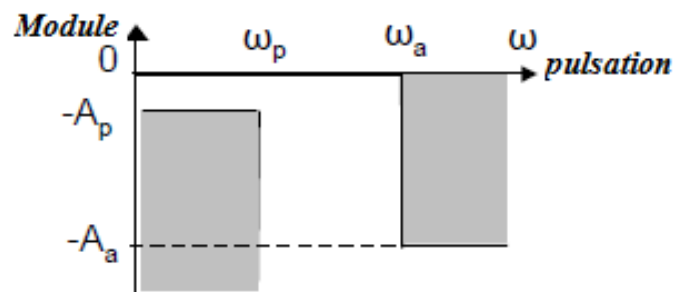
$$\omega < \omega_p \rightarrow 0\text{dB} > 20\log |H(j\omega)| > -A_p$$

Bande de transition

$$\omega_p < \omega < \omega_a \rightarrow 20\log |H(j\omega)| < -A_p$$

Bande atténuée

$$\omega > \omega_a \rightarrow 20\log |H(j\omega)| < -A_a$$



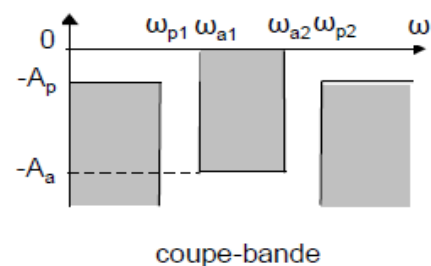
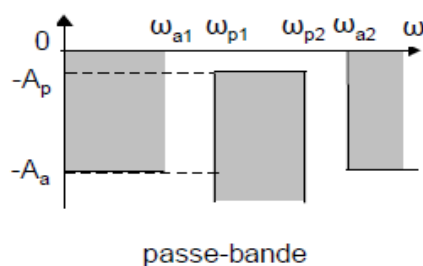
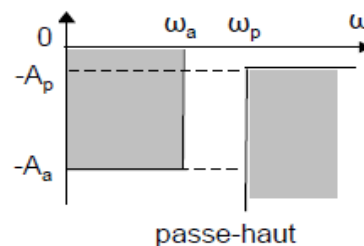
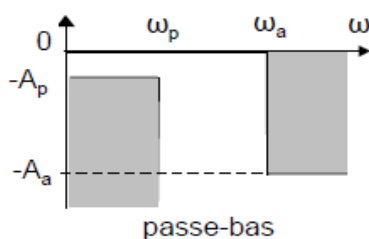
### Calcul aux points limites

$$\omega = \omega_p \rightarrow 20 \log |H(j\omega_p)| = -A_p, \quad \text{soit } |H(j\omega_p)| = 10^{-A_p/20}$$

$$\omega = \omega_a \rightarrow 20 \log |H(j\omega)| = -A_a, \quad \text{soit } |H(j\omega)| = 10^{-A_a/20}$$

On donne  $A_p$  l'atténuation maximale tolérée dans la bande passante, et  $A_a$  l'atténuation minimale tolérée dans la bande d'arrêt.

### Autres gabarits



### Approximation de Butterworth

On réalise un filtre de butterworth par la mise en cascade des sections de second ordre avec éventuellement une section de premier ordre pour les ordres impairs.

Un filtre de butterworth d'ordre N est de la forme :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

La réponse fréquentielle est normalisée par rapport à la pulsation de coupure  $\omega_c$  pour laquelle l'atténuation est de -3 dB.

### Les différentes formes de la fonction de transfert

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad \xleftrightarrow{p=j\omega} \quad |H(p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad \xleftrightarrow{s=\frac{p}{\omega_c}} \quad |H(s)|^2 = \frac{1}{1 + (s)^{2N}}$$

$$s = j\frac{\omega}{\omega_c} \leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_c} = -js \Rightarrow |H(s)|^2 = \frac{1}{1 + (-1)^N (s)^{2N}}$$

Calcul des pôles de  $1 + (-1)^N (s)^{2N} = 0$  (**polynôme de Buterworth**)  $\Rightarrow s_n = e^{j\frac{N-1+2k}{2N}\pi}$

$$s_k = \left[ -\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) + j\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \right] \quad 0 < k < 2N - 1$$

### Polynômes de Butterworth développés

n=1 : S+1

n=2 : S<sup>2</sup>+1,41S+1

n=3 : (S+1)(S<sup>2</sup>+S+1)

n=4 : (S<sup>2</sup>+0,765S+1)(S<sup>2</sup>+1,848S+1)

n=5 : (S+1)(S<sup>2</sup>+0,618S+1)(S<sup>2</sup>+1,618S+1)

n=6 : (S<sup>2</sup>+1,932S+1)(S<sup>2</sup>+1,414S+1)(S<sup>2</sup>+0,518S+1)

etc.....

### Calcul de l'ordre du filtre(N)

$$\omega = \omega_p \rightarrow 20 \log|H(j\omega)| = -A_p, \quad \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N} = 10^{A_p/10} - 1$$

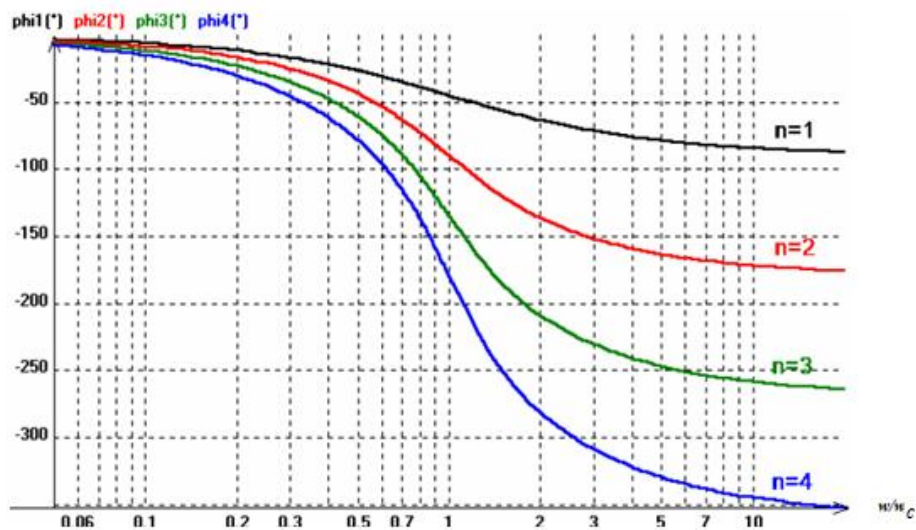
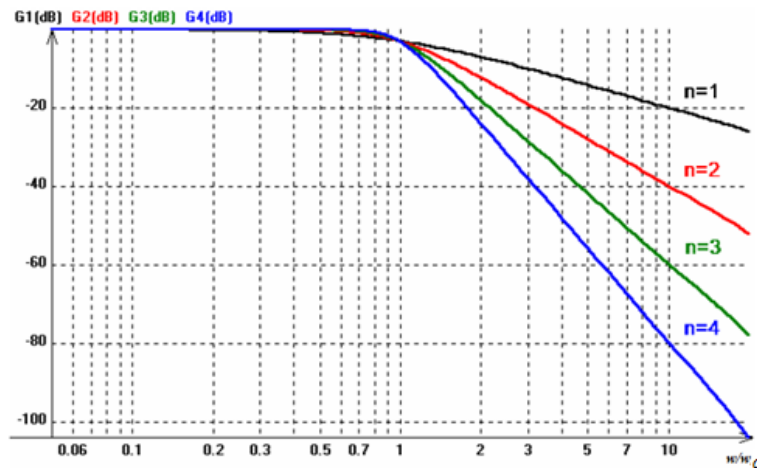
$$\omega = \omega_a \rightarrow 20 \log|H(j\omega)| = -A_a, \quad \left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2N} = 10^{A_a/10} - 1$$

$$N = \frac{\log\left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right) - \log\left(10^{\frac{A_a}{10}} - 1\right)}{2 \log\left(\frac{\omega_p}{\omega_a}\right)} \quad f_{c1} = \frac{f_p}{\sqrt[2N]{\frac{A_p}{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}}, \quad f_{c2} = \frac{f_a}{\sqrt[2N]{\frac{A_a}{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}}} \rightarrow f_c = \sqrt{f_{c1}f_{c2}}$$

### Tracé des courbes du gain et phase pour différentes valeurs de n

$$\frac{w}{w_c} \gg 1, \quad H_{dB} = -10 \log \left( \frac{w}{w_c} \right)^{2N} = -20N \log \left( \frac{w}{w_c} \right)$$

$$\varphi \rightarrow -N \frac{\pi}{2} \text{ pour } \frac{w}{w_c} \gg 1, \quad \varphi \rightarrow -N \left( \frac{\pi}{4} \right) \text{ pour } \frac{w}{w_c} = 1$$



### Approximation de tchybetchev

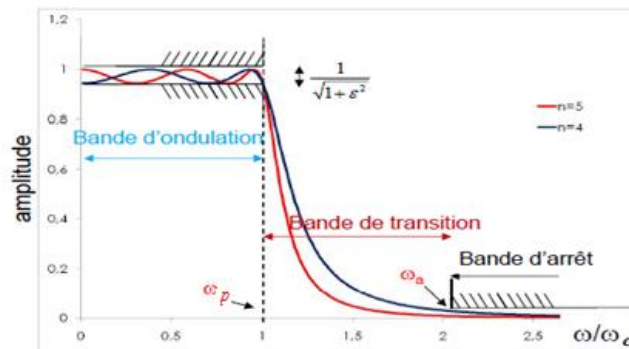
Il existe 2 types

$$\text{Type I} \quad |H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + (\varepsilon)^2 T_N^2 \left( \frac{w}{w_p} \right)}, \quad \varepsilon < 1$$

$$\text{Type II} \quad |H(jw)|^2 = \frac{(\varepsilon)^2 T_N^2 \left( \frac{w}{w_c} \right)}{1 + (\varepsilon)^2 T_N^2 \left( \frac{w}{w_p} \right)}, \quad \varepsilon < 1$$

**Type I** : Oscillations dans la bande passante  $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} < |H(jw)| < 1$

pour  $N$  pair  $|H(0)|_{dB} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ , pour  $N$  impair  $|H(0)|_{dB} = 0$



Pour  $w \leq w_p \rightarrow |H(jw)|$  oscille  $\frac{N}{2}$  entre 1 et  $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

Pour  $w > w_p \rightarrow |H(jw)|$  est monotone et décroissante.

Les polynômes de Chebyshev sont donnés par récurrence :

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x)$$

Et les deux premiers polynômes se calculent par cette relation  $T_N(x) = \operatorname{Re}[x + j\sqrt{1-x^2}]^N$

Si  $x = 1 \rightarrow T_0(x) = T_1(x) = T_2(x) = \dots = T_N(x) = 1$ ,  $|H(1)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

La fréquence de coupure à -3dB est liée à la pulsation  $w_p$  par la relation

$$w_c = w_p \cosh \left[ \frac{1}{n} \operatorname{acosh} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]$$

L'ordre  $N$  du filtre est donné par :

$$N = \frac{\operatorname{argch} \left( \frac{\sqrt{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}}{\varepsilon} \right)}{\operatorname{argch} \left( \frac{w_a}{w_p} \right)}$$

**Forme développée des Polynômes de Chebyshev dépend de la valeur de  $\varepsilon$**

Exemple  $\varepsilon = 0.5$

$n=1$  :  $0,509s+1$

$n=2$  :  $0,907s^2+0,996s+1$

$n=3$  :  $(2,024s+1)(1,006s^2+0,497s+1)$

$n=4$  :  $(3,579s^2+2,411s+1)(1,014s^2+0,283s+1)$

$n=5$  :  $(3,454s+1)(2,329s^2+1,091s+1)(1,012s^2+0,181s+1)$

$n=6$  :  $(8,019s^2+3,722s+1)(1,793s^2+0,609s+1)(1,009s^2+0,126s+1)$

etc

**Forme factorisée**

$$n=1 : 0,509s+1$$

$$n=2 : 0,907s^2+0,996s+1$$

$$n=3 : (2,024s+1)(1,006s^2+0,497s+1)$$

$$n=4 : (3,579s^2+2,411s+1)(1,014s^2+0,283s+1)$$

$$n=5 : (3,454s+1)(2,329s^2+1,091s+1)(1,012s^2+0,181s+1)$$

$$n=6 : (8,019s^2+3,722s+1)(1,793s^2+0,609s+1)(1,009s^2+0,126s+1)$$

etc

**Les différentes étapes de la synthèse d'un filtre analogique**

1. Définition du gabarit désiré

2. Normalisation du gabarit par rapport à une pulsation de référence  $\omega_r$  :  $j \frac{\omega}{\omega_r} \rightarrow s$

- fréquence de coupure à -3dB pour un filtre de Butterworth de la forme simplifiée,

- fréquence d'atténuation max. en bande passante pour un filtre de Butterworth et pour

Chebyshev .

- fréquence centrale pour un filtre passe-bande ou coupe-bande)

3. Transposition en gabarit (normalisé) passe-bas

4. Détermination de l'ordre du filtre (calcul, abaques)

5. Recherche de la fonction de transfert normalisée (mise en facteur) à partir des tables de polynômes.

6. Transposition du filtre passe-bas étudié vers le type de filtre recherché.

7. Dénormalisation :  $s \rightarrow j \frac{\omega}{\omega_r}$