Transformées de Fourier Discrète DFT et rapide FFT

Signaux discrets

Soit un signal x(t) échantillonné à une période Te. Le signal échantillonné s'écrit :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Considérons la période d'échantillonnage est normalisée ($T_e = 1$), alors, le signal échantillonné s'écrit

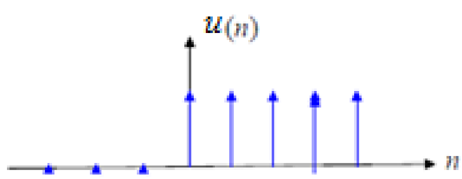
$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(t - n)$$

La suite de valeurs de $\{\, x(n)\}$ obtenue est appelée un signal discret.

Signaux discrets usuels

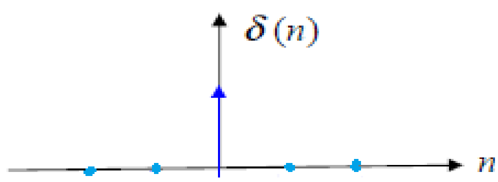
Echelon unitaire

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



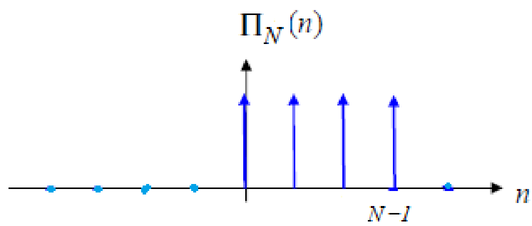
Impulsion de Dirac

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



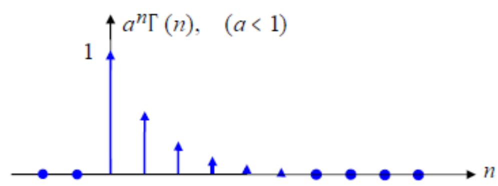
Signal rectangulaire

$$rect_N(n) = \begin{cases} 1 & n \leq N - 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Exponentielle décroissante

$$x(n) = a^n u(n) \quad , \; a < 1 \;\; \forall \, n \in \mathbb{Z}$$



Relation entre les signaux

$$u(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(n)$$

$$rect(n) = u(n) - u(n - N)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1)$$

$$sgn(n) = 2u(n) - 1$$

Classe des signaux

Périodique : $x(n) = x(n+N),\ N\ période$

Durée limitée : $x(n) = \begin{cases} x(n) & n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

Energie finie : $E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$

Puissance finie :

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} |x(n)|^2$$

Transformée de Fourier des signaux à temps discret(TFTD)

Définition

Un signal discret est défini par une suite d'échantillons espacés entre eux d'une période Te. La transformée de Fourier appliquée à un signal discret x(n) devient :

$$x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n}$$

f est une variable continue, donc, la TF d'une fonction discrète est une fonction continue.

Condition d'existence de la TFTD

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| (< \infty)$ est finie

L'existence de la TFTD est liée la convergence de la série $\{x(n)\}$.

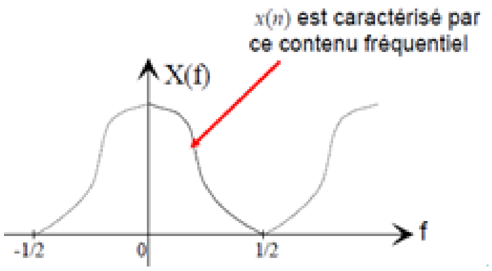
Propriétés de la TFTD

Périodicité

$$x(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi(f+1)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} . e^{-j2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} = x(f)$$

$x(f)$ est périodique de période f=1(unité)

Toute l'information fréquentielle du signal est localisée dans l'intervalle de fréquence $f \epsilon [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$



Cas général pour $f_e \neq \mathbf{1}$

L'information fréquentielle est contenue dans la bande $f \epsilon [-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]$

TF inverse

$TFTD$: $x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn}$, $TFTDI$: $x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(f)e^{j2\pi fn}df$, $f_e = 1$

Théorème de retard

Soit $y(n) = x(n - n_0) \xrightarrow{TFTD} y(f) = X(f)e^{-j2\pi fn_0}$

Produit de convolution

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \xrightarrow{discret} y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)h(n-l)$

$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)h(n-l) \xrightarrow{TFTD} Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)h(n-l)e^{-j2\pi fn}$

$$Y(f) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-l)e^{-j2\pi f(n-l)}\right]e^{-j2\pi fl} = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)e^{-j2\pi fl}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-l)e^{-j2\pi f(n-l)}\right)$$

$$Y(f) = X(f).H(f)$$

Egalité de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2\, df$$

Exemple : trouver le produit de convolution de

$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0,1,2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$, $h(n) = [1\ \ 0.75\ \ 0.5\ \ 0.25\ \ 0] = [h(0)\ h(1)\ h(2)\ h(3)\ h(4)]$

Transformée de Fourier discrète (TFD)

- Le calcul de la TF nécessite une infinité de points de mesures $x(n)$ (pas toujours possible dans la pratique : contraintes temps réel, etc.)
- Le calculateur ne peut calculer une TFTD car elle possède un nombre infini de points fréquentiels (f varie continuellement).

$\rightarrow$ La TFD résout ce problème par :

- Limitation de la durée de $x(n)$ i.e. considérer un nombre fini N de points temporels.
- Discrétisation de la fréquence (considérer un nombre fini L de points fréquentiels) $f = k\Delta f = k\frac{1}{L}$.

$$X(\frac{k}{L}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{k}{L}n}, \quad k = 0, \dots \dots \dots N-1 \rightarrow Correspond \text{ à } TFD$$

Définition de la TFD

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x(0), x(1), \dots \dots x(N-1)$, la suite de N termes $X(0), X(1), \dots \dots X(N-1)$ définie par

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{k}{L}n}$$

k : variable fréquentielle $k = 0, \dots \dots . L-1$

n : variable temporelle $n = 0, \dots \dots . N-1$

N : nombre de points temporels
L : nombre de points fréquentiels
Remarque : $X(k)$ est périodique de période L

TFD inverse

$$x(n) = \frac{1}{\mathrm{L}} \sum_{k=0}^{L-1} X(k) e^{j2\pi\frac{k}{L}n}$$

Propriété de la TFD

Périodicité : $X(k)$ est périodique de période L

Linéarité : $a.x(n) + b.y(n) \rightarrow a.X(k) + b.Y(k)$

Décalage temporel : $x(n - n_0) \rightarrow X(k).e^{-j2\pi\frac{k}{N}n_0}$

Décalage fréquentiel : $x(n)e^{-j2\pi\frac{k_0}{N}n} \rightarrow X[(k - k_0) mod\, N]$

Relation de Parseval : $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$

Produit de convolution circulaire

Soit $x(n)$ et $y(n)$ deux signaux discrets de durée finie N. Leur produit de convolution circulaire est défini par :

$z(n) = x(n) \otimes y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) y[(n - i) modN]$, $z(n)$ est périodique de période N

On peut voir la convolution circulaire comme la rotation d'une séquence autour d'une autre.

Exemple :

$x(n) = 1$ pour $n \in [0,1, \dots\dots,7]$

Convolution linéaire

$x(n) * x(n) = \{1,2, \dots\dots,7,8,7, \dots\dots 2,1\}$ pour $n \in [0,1, \dots\dots,15]$

x(0) = somme des x(i).x(0-i) = 1*1+1*0+1*0+...=1

x(1) = somme des x(i).x(1-i) = 1*1+1*1+1*0+...=2

…

Convolution circulaire :

$$x(n) \otimes x(n) = 8 \quad pour\; n \in [0,1, \dots\dots,7]$$

x(0) = somme des x(i).[x(0-i) mod 8] = 1*1+1*1+1*1+...=8

x(1) = somme des x(i).[x(1-i) mod 8] = 1*1+1*1+1*1+...=8

...

TFD et convolution circulaire

$$x(n) \otimes y(n) \xrightarrow{TFD} X(k).Y(k)$$

$$x(n).y(n) \xrightarrow{TFD^{-1}} \frac{1}{N} X(k) \otimes Y(k)$$

Analyse spectrale et la TFD

On veut utiliser la TFD pour analyser le contenu fréquentiel d'un signal continu $x(t)$. Ceci impose les opérations suivantes :

- Echantillonnage de $x(t)$: choix de la fréquence d'échantillonnage f_e fixée par le théorème de Shannon.
- Quantification pour générer le signal discret $x(n)$.
- Troncature de $x(n)$ a N échantillons.
- Discrétisation du domaine fréquentiel en L points.

Troncature du signal discret (fenêtrage temporel)

- **Opération dans le domaine temporel**

Soit $x(n)$ un signal discret, Le signal résultant de la troncature de $x(n)$ a N échantillons est :

$x_N(n) = x(n).h(n)$ avec : $h(n) = \begin{cases} 1 & 0 < n < N-1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

$h(n)$: Fenêtre rectangulaire de largeur N

N : durée d'observation du signal $x(n)$

- **Influence de la troncature dans le domaine fréquentiel**

Calculons la TFTD du signal tronqué.

$x_N(n) = x(n).h(n) \xrightarrow{TFTD} X_N(f) = X(f) * H(f)$

La TFTD du signal tronqué $x_N(n)$ est obtenue par filtrage de la TFD de $x(n)$ a travers un filtre de réponse impulsionnelle $H(f)$.

- **Echantillonnage de $X_N(f)$**

→ La TFD $X_N(k)$ est obtenue par discrétisation du domaine fréquentiel de $X_N(f)$

$$f = k\Delta f \ , \ avec \ \Delta f = 1/L \ , \ k = 0, \dots \dots . . L-1$$

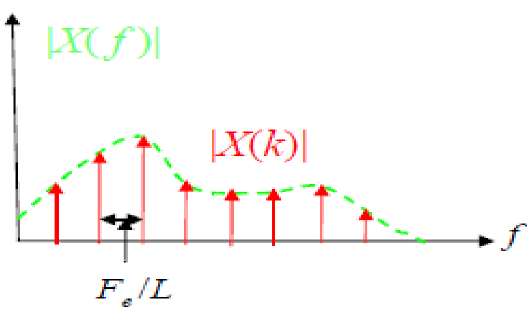
→ La distance entre 2 points fréquentiels est $1/L$ (ou f_e/L)

→ Avec l'opération de fenêtrage, on obtient :

$X_N(k) = X(f) * H(f)|_{f=k/L}$

- **Influences du fenêtrage temporel et de la discrétisation fréquentielle**

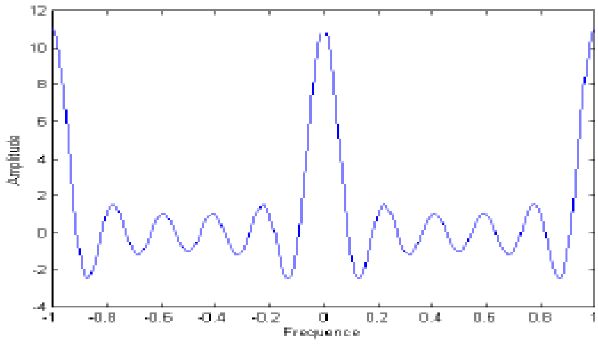
La TFTD d'un signal $x(n)$ et sa TFD sont données par leurs spectres $|X(f)|$ et $|X(k)|$



Le choix de la fréquence $1/L$ (ou f_e/L) aura une influence sur la précision de l'analyse spectrale

TFTD de la fenêtre rectangulaire

$$H(f) = \frac{sin\pi f(N+1)}{sin\pi f}$$



La convolution fréquentielle de $X(f)$ par $H(f)$ aura pour conséquence l'apparition d'ondulations dans le spectre $X_N(f)$ est donc dans $X_N(k)$: c'est le problème de résolution.

Précision de la TFD

Problématique :

Fenêtrage $\rightarrow$ le spectre de la fenêtre apparait sous forme de plusieurs raies non nulles.

- La plus importante en module est proche de la vraie fréquence f_0.
- L'erreur maximale commise est $1/L$.

Objectifs

- Résolution en fréquence (largeur du lobe) permet de distinguer 2 fréquences proches
- Résolution en amplitude (atténuation des lobes secondaires) permet de distinguer des raies spectrales de faibles amplitudes ou une raie de faible amplitude proche d'une raie d'amplitude élevée.

Amélioration de la précision :

$\rightarrow$ Diminuer f_e = augmenter T_e

- Suppression des hautes fréquences
- Amélioration de la précision sur les fréquences restantes

$\rightarrow$ Augmentation du nombre de points fréquentiel L

$\rightarrow$ Augmentation du nombre de points temporels N

- Interpolation fréquentielle : "zéro padding"
- Ajout de k-1 zéros entre les échantillons
- Précision de 1/kN au lieu de 1/N

TFD et fenêtrage temporel

Objectif : Amélioration de l'analyse spectrale par pondération des échantillons avant filtrage.

Réalisation : Remplacement de la fenêtre rectangulaire *h*(*n*) par une fenêtre dont la TF présente des ondulations plus faibles.

Exemples de fenêtre

Fenêtre de Hanning

$$h(n) = \begin{cases} 0.5\left(1+\cos\left(2\pi\frac{n}{N}\right)\right), & n = 0,1,\dots\dots N-1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

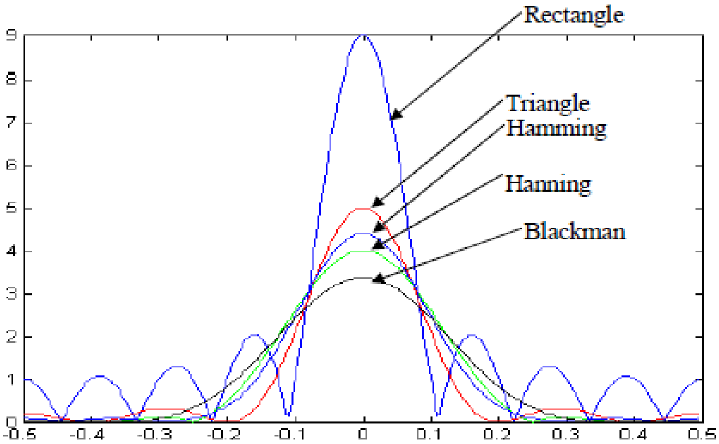
Fenêtre de Hamming

$$h(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.46\cos\left(2\pi\frac{n}{N}\right), & n = 0,1,\dots\dots N-1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

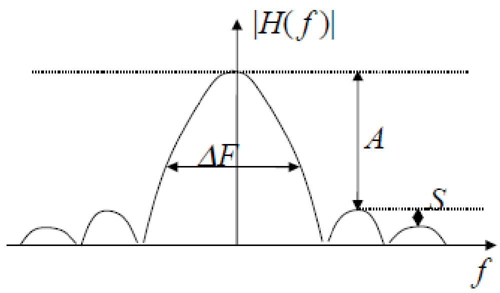
→ Chaque type de fenêtre a une réponse en fréquence particulière (largeur du lobe principale, amplitude des lobes secondaires, …) qui permet de choisir au mieux la « bonne » en fonction des applications.

→ En général les résolutions en fréquence et en amplitude sont d'autant meilleures que le lobe principal est étroit et les lobes secondaires sont de faibles amplitudes.

Choix de la fenêtre



- rapport *A* entre les maximums du lobe central et des lobes secondaires de la TFD des fenêtres.
- atténuation des lobes secondaires de la TFD des fenêtres *S*.
- largeur du lobe central ΔF.



Transformée de Fourier Rapide (FFT)

La transformation de Fourier rapide (TFR), ou encore Fast Fourier Transform (FFT), est directement issue d'une réorganisation du calcul des matrices de la transformée de Fourier discrète (TFD). $X(k)$ est la TFD du signal $x(n)$. N points du signal $x(n)$ donnent N points de la TFD $X(k)$.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{k}{L}n} \text{ , } k = 0,1, \ldots \ldots \ldots N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{\mathrm{L}} \sum_{k=0}^{L-1} X(k) e^{j2\pi\frac{k}{L}n} \text{ , } n = 0,1, \ldots \ldots \ldots N-1$$

x(n) et X(k) sont, dans le cas général, des nombres complexes.

Nous pouvons réécrire l'équation X(k) ci dessus sous forme matricielle en faisant ainsi apparaître la complexité de l'algorithme de la TFD.

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Avec $W_N = e^{-j2\frac{\pi}{N}}$

La TFD revient à calculer un produit matrice-vecteur où chaque élément est de type complexe.

La complexité de calcul de la TFD est donc de N^2 multiplications, et de $N\,(N-1)$ additions sur des nombres complexes.

$$W_N^{k(N-n)} = \left(W_N^{kn}\right)^*$$

$$W_N^{k(N+n)} = W_N^{n(N+k)} = W_N^{kn}$$

$$W_N^{n+\frac{N}{2}} = -W_N^n$$

$$W_N^{2nk} = W_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

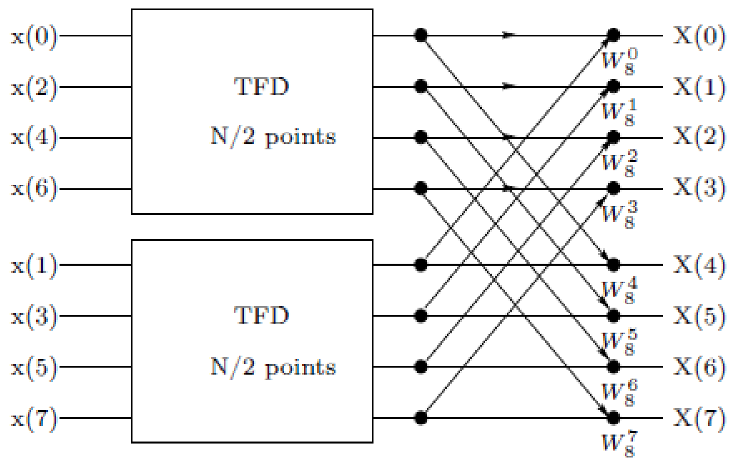
FFT partagée dans le temps (décimation en temps)

On partage $X(k)$ en une somme sur les termes d'indices pairs et une autre sur les termes d'indices impairs, dans notre exemple on se limitera au cas où N est une puissance de deux.

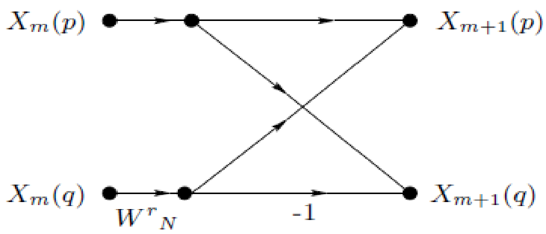
$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n\ pair} x(n).W_N^{nk} + \sum_{n\ impair} x(n).W_N^{nk} \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n).W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1).W_N^{(2n+1)k} \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n).W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1).W_{N/2}^{nk} \\ X(k) &= G(k) + W_N^k.H(k) \end{aligned}$$

Où $G(k)$: TFD sur les $N/2$ points d'indices pairs,
$H(k)$: TFD sur les $N/2$ points d'indices impairs.

L'application de ces équations est représentée graphiquement à la figure ci dessous. On remarque qu'une TFD d'ordre N est décomposée en 2 TFD d'ordre N/2 suivies d'une recombinaison.



L'opération élémentaire est ici appelée papillon DIT. On peut le représenter sous sa forme générale entre deux étages m et m+1 avec $m = 1, 2, \ldots, \log_2 N$.



$$\begin{cases} X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r . X_m(q) \\ X_{m+1}(q) = X_m(p) - W_N^r . X_m(q) \end{cases}$$

<u>FFT partagée dans les fréquences (décimation en fréquence)</u>

On partage X(k) en une somme sur les $N/2$ premiers termes et une autre sur les $N/2$ autres termes :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n).W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x().W_N^{nk}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n).W_N^{nk} + W_N^{kN/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2).W_N^{nk}$$

$$X(k) = \sum^{N/2-1} \left[x(n) + (-1)^k . x(n+N/2) \right] W_N^{nk}$$

On effectue une séparation des indices pairs et impairs :

$$X(2p) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+N/2)]\, W_N^{2pk}$$
$$X(2p+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+N/2)]\, W_N^{2pk}.W_N^n$$

$$X(2p) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+N/2)]\, W_{N/2}^{pk}$$
$$X(2p+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left([x(n) - x(n+N/2)]\, W_{N/2}^{pk}\right).W_N^n$$