U.S.T.H.B
Faculté des Mathématiques
1ère année Licence ST
Sections 1-15

Examen Final de Maths 1

Coordination SM-ST du module MATHS I
Année universitaire 2019-2020
Durée: 01 h 15 mn

La calculatrice, l'effaceur et le téléphone portable sont strictement interdits

Exercice 1. (6 points)

1. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{cos(x)}$.
   (a) Déterminer $f([0, \frac{\pi}{2}])$, $f([\frac{-\pi}{2}, 0])$ et $f^{-1}(\{3\})$.
   (b) f est-elle injective, surjective?
2. Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse, justifier : $arcsin(sin(\pi)) = \pi$.
3. Soit $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 < 5\ et\ |x - 2| \geq 3\}$. Déterminer Sup A, Inf A, Min A et Max A s'ils existent.

Exercice 2. (8 points)

Soit $a \in]0, 1]$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = arcsin(\sqrt{a - x^2}).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la fonction f est dérivable en 0.
4. On pose $a = \frac{1}{2}$. On considère l'équation

$$f(x) = \frac{\pi}{6}. \qquad (E)$$

   (a) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.
   (b) Résoudre l'équation (E) dans l'intervalle $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Remarque. $sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

Exercice 3. (6 points)

On considère la fonction f définie pour tout $x \in]\frac{-\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \frac{ln(1 + shx)}{thx}.$$

1. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Déduire que f est prolongeable par continuité en 0.
3. Notons $\widetilde{f}$ le prolongement de f en 0. Donner l'équation de la tangente au point $(0, \widetilde{f}(0))$ à la courbe $\mathcal{C}_{\widetilde{f}}$ représentative de $\widetilde{f}$ puis déduire sa position par rapport à $\mathcal{C}_{\widetilde{f}}$.

On donne les développements limités au voisinage de 0 suivants:

$$\begin{aligned} shx &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ thx &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$