L'effaceur, la calculatrice et le téléphone portable sont strictement interdits

Exercice 1(07 points)

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\ln(e+x^2)}$.

1. Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variations.
2. Déterminer l'image directe $f(\{-1,1\})$ et l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$.
3. Déduire alors que f n'est ni injective, ni surjective.
4. Déterminer un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée pour que f soit bijective, trouver alors l'expression de la fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 2(06 points)

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en $x = 0$.
2. On pose $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \neq 0 \\ l & si \quad x = 0 \end{cases}$, où $l = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

   $a)$ Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable en $x = 0$ et donner la valeur de $\tilde{g}'(0)$.

   $b)$ Calculer $\tilde{g}'$ sur $\mathbb{R}$, (on a $\tilde{g}' = g'$ sur $\mathbb{R}^\star$).

Exercice 3(07 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f(x) = x - x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$, puis déduire la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right).$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = \dfrac{4\sin x - \arctan x}{\ln(1+x)}$ et déduire la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\sin x - \arctan x}{\ln(1+x)}\right).$$

On donne les développements limités au voisinage de 0 suivants.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.