جامعة باتنة 1
كلية علوم المادة - قسم الفيزياء
السنة الأولى ماستر
شعبة الفيزياء
مسار الفيزياء النظرية

الإختبار الإستدراكي في مقياس
الميكانيك الكمي المعمق 1

الإجابة النموذجية
فيفري 2017

التمرين الأول:

- برهان علاقة هاملتوني التصحيحات النسبية لمعادلة شرودينغر. لدينا هاملتوني الطاقة لجسيم نسبي:

$$
\begin{aligned}
H =&\sqrt{m^2c^4+p^2c^2} = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} = mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{p^2}{m^2c^2}\right)^2+\cdots\right)\\
=&mc^2+\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} = mc^2+\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{2\,m_e\,c^2}\left(\frac{\hat{p}^2}{2\,m_e}\right)^2
\end{aligned}
$$

الطرف الأول هو طاقة السكون، و الطرف الثاني هو الطاقة الحركية الموجودة في معادلة شرودينغر،و الطرف الثالث:

$$\hat{H}_R = -\frac{1}{2\,m_e\,c^2}\left(\frac{\hat{p}^2}{2\,m_e}\right)^2$$

هو طرف التصحيحات النسبية.

- الهاملتوني الإجمالي لهذه المسألة هو:

$$
\begin{aligned}
\hat{H} =&\hat{H}_0+\hat{H}_{\text{pert}} = \frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\,\omega^2\hat{x}^2-F\,\hat{x} = \frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\,\omega^2\left(\hat{x}^2-2\frac{F}{m\omega^2}\,\hat{x}+\frac{F^2}{m^2\omega^4}-\frac{F^2}{m^2\omega^4}\right).\\
=&\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\,\omega^2\left(\hat{x}-\tilde{x}\right)^2-\frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2\,, \qquad \tilde{x} = \frac{F}{m\omega^2}\,.
\end{aligned}
$$

نعرف الهاملتوني $\hat{\tilde{H}}$ حيث:

$$\hat{H} = \hat{\tilde{H}}-\frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2 \Rightarrow \hat{\tilde{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\,\omega^2\hat{x}'^2\,, \qquad x' = \hat{x}-\tilde{x}$$

حيث $\tilde{x}$ ثابت، و الذي يعني أن $\hat{H}$ يتلائم مع $\hat{\tilde{H}}$ و القيم الذاتية لهما ترتبط بالعلاقة $E = \tilde{E}-\frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2$، و لهما نفس الدوال الذاتية المشتركة.

إن الهاملتوني $\hat{\tilde{H}}$، هو هاملتوني هزاز توافقي، و هذا يعني أن المسألة تقبل الحل تماما. القيم الذاتية للطاقة له هي $\tilde{E} = \hbar\omega(n+1/2)$. و منه القيم الذاتية للهاملتوني $\hat{H}$ هي:

$$E = \hbar\omega(n+1/2)-\frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2 = \hbar\omega(n+1/2)-\frac{F^2}{2m\omega^2}$$

كما أن الدالة الذاتية الأساسية للهاملتوني $\hat{H}$ الأرضي هي نفسها الدالة الذاتية للهاملتوني $\hat{\tilde{H}}$، و التي هي:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\,\exp\left(-\frac{x'^2}{2x_0^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\,\exp\left(-\frac{(x-\tilde{x})^2}{2\,x_0^2}\right)$$

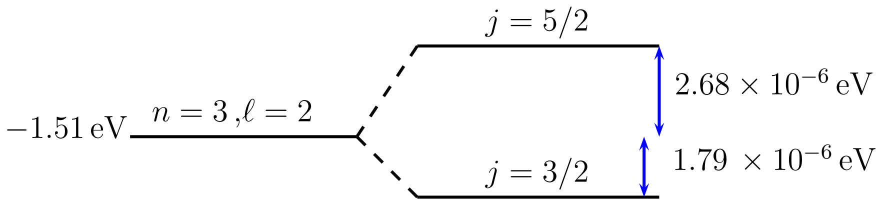
- لدينا: $\hat{\vec{\mathbf{J}}} = \hat{\vec{\mathbf{L}}} + \hat{\vec{\mathbf{S}}}$ و منه $\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{\vec{\mathbf{L}}}\cdot\hat{\vec{\mathbf{S}}}$. إذن $\hat{\vec{\mathbf{L}}}\cdot\hat{\vec{\mathbf{S}}} = \left(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2\right)/2$. نستخدم الكاتات الذاتية $|n,\ell,j,m_j\rangle$ التي يكون فيها الإضطراب قطريا، و بتطبيق نظرية الإضطراب لدينا التصحيح للطاقة هو:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \langle n,\ell,j,m_j|H_{LS}|n,\ell,j,m_j\rangle = \alpha^2\,E_R\langle A(r)\rangle\langle n,\ell,j,m_j|\frac{J^2-L^2-S^2}{2\hbar^2}|n,\ell,j,m_j\rangle \\ &= \alpha^2\,E_R\frac{2}{n^3\ell(\ell+1)(2\ell+1)}\frac{1}{2}\left(j(j+1)-\ell(\ell+1)-s(s+1)\right)\end{aligned}$$

حيث $j = \ell \pm 1/2$. إذن لدينا تصحيحان يوافقان قيمتي j. من أجل $\ell = 2$ لدينا $j = 3/2$ أو $j = 5/2$. و منه نجد:

$$\Delta E^+ = \frac{1}{405}\alpha^2\,E_R = 1.79\ \times 10^{-6}\,\mathrm{eV}\,,\qquad \Delta E^- = -\frac{1}{270}\alpha^2 E_R = -2.68\times 10^{-6}\,\mathrm{eV}$$

المخطط الذي نبين فيه هذا التأثير.



التمرين الثاني:

- نحسب القيمة التوقعية $E(\alpha) = \langle\psi_t|\hat{H}|\psi_t\rangle = T + V$، حيث:

$$\begin{aligned}T &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_t^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{\mathrm{d}^2\psi_t}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2\alpha^2}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-x^2/2\alpha^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)e^{-x^2/\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha^3}\left(\alpha\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\alpha\sqrt{\pi}\right) = \frac{\hbar^2}{4m}\frac{1}{\alpha^2} \\ V &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_t^* V\psi_t\,\mathrm{d}x = -\frac{\hbar^2\sqrt{\pi}}{2m\,\beta^3}\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-x^2/\alpha^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\hbar^2}{2m\,\beta^3}\frac{1}{\alpha}2\int_0^{\infty}xe^{-x^2/\alpha^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m\,\beta^3}\frac{1}{\alpha}2\,\frac{\alpha^2}{2} = -\frac{\hbar^2}{2m\beta^3}\,\alpha\end{aligned}$$

$$E(\alpha) = \frac{\hbar^2}{4m}\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\hbar^2}{2m\beta^3}\,\alpha = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{\alpha}{\beta^3}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right).$$

إذن:

$$\frac{\mathrm{d}E(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha_0^3 = -\beta^3 \Rightarrow \alpha_0 = -\beta$$

إذن الحد الأعلى للطاقة بالتعويض

$$E(\alpha_0) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2\beta^2}+\frac{\beta}{\beta^3}\right) = \frac{3\hbar^2}{4m^3\beta^2}$$

- التصحيح للطاقة الأساسية من الدرجة الأولى:

$$\begin{aligned}\Delta E = \langle 0|V|0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^*(x)V\psi(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\hbar^2\sqrt{\pi}}{2m\beta^3}\frac{1}{\sqrt{\pi}x_0}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,e^{-x^2/x_0^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m\beta^3}\frac{1}{x_0}x_0^2 = -\frac{\hbar^2}{2m\beta^3}x_0 = -\frac{\hbar^2}{2m\beta^3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\end{aligned}$$