جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaia

Université A. Mira Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Première année M.I.

04 – 02 – 2019
Durée : 1h30mn

Examen d'Algèbre 1

Exercice 1. (04 points)

1. Soient P et Q deux propositions. Montrer que $\overline{P \Rightarrow Q} \Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}$ est vraie.

2. Ecrire la négation de la proposition R suivante:
$\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 0 \Longrightarrow 1/x > 0)$. Dire si R est vraie.

3. Soit la proposition S suivante:
$\forall x, y \in \mathbb{R}, [(x > 0) \wedge (y > 0) \Longrightarrow xy > 0]$.
Montrer que $S \Longrightarrow R$.

4. Montrer que pour tous réels $a \neq 1$ et $b \neq 1$, on a $a + b - ab \neq 1$.

Exercice 2. (06 points)

Soient

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} ; \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

1. Soit $\mathbf{B} = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$. Déterminer $f^{-1}(\mathbf{B})$.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.
3. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives? Surjectives?

Exercice 3. (06 points)

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ suivante:

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0, x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence des éléments: $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$ et $C = (1, 1)$.
3. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{R}^2_{/\mathcal{R}}$.

Questions de cours (04 points)

1. Donner la définition d'un groupe abélien.
2. Soit $(G, \star)$ un groupe.
Donner la caractérisation d'un élément neutre de G et montrer son unicité.
3. Soit $x \in G$, donner la caractérisation de l'élément symétrique de x et montrer son unicité.

Pour le Département.

1ère année
MI

2018/2019

Corrigé et Barème Détaillé de l'examen d'Algèbre.

Exercice 1 :

1°) 1pt.

2°) 1pt : 0,5 + 0,5.

3°) 1pt.

4°) 1pt.

Exercice 2 :

1°) 1pt

2°) 2pts (0,5 pour chaque réponse).

3°) 3pts (0,5 pour chaque réponse).

Exercice 3 :

1°) 1,5 pts (0,5 + 0,5 + 0,5)

2°) 1,5. (0,5 + 0,5 + 0,5)

3°) $(\underbrace{2,25}_{\text{pour chaque classe}} + \underbrace{0,75}_{\mathbb{R}^2 \,|\, \mathbb{R}})$.

Questions de cours :

1°) 2pts

2°) 0,5 + 0,5

3°) 0,5 + 0,5

Exo 1 1) $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$

P	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P \Rightarrow Q}$	$P \wedge \overline{Q}$	$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

2) $R : \forall x \in \mathbb{R} \ (x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

$\overline{R} : \exists x \in \mathbb{R} \ (x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} \leq 0)$

on a $\overline{R}$ est fausse donc R est vraie

3) $S : \forall x, y \in \mathbb{R} \ [(x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow xy > 0]$

On montre que $S \Rightarrow R$

Il suffit de prendre dans la proposition S, $y = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

on aura $\forall x, [(x > 0) \wedge \left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

d'où $\forall x, \ (x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0)$.

4) $a \neq 1$ et $b \neq 1$, on montre $a + b - ab \neq 1$

par la contraposée.

$(a + b - ab = 1) \Rightarrow (a = 1 \vee b = 1)$

$a + b - ab = 1 \Rightarrow a(1 - b) + b - 1 = 0$

$\Rightarrow (1 - b)(a - 1) = 0 \Rightarrow b = 1 \vee a = 1$.

d'où $\forall a, b$; $a \neq 1$ et $b \neq 1 \Rightarrow a + b - ab \neq 1$.

Exercice 2 :

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \mapsto 2n$

1) $B = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$

$f^{-1}(B) = \{n \in \mathbb{N} \,/\, f(n) \in B\}$

$f(n) = 2k+1 \Rightarrow 2n = 2k+1$ (impossible) d'ou

$f^{-1}(B) = \emptyset$.

2) a) f est injective en effet :

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$

b) f n'est pas surjective d'après la 1ère question.

contre exple : pour $n=3 = 2\times1+1$; $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

a) g n'est pas injective car

pour $n = 2$, $g(2) = 1$

$n' = 3$ $g(3) = 1$

$n \neq n'$ et $g(n) = g(n')$.

b) g est surjective en effet

pour tout $y \in \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $g(n) = y$.

$g(n) = y \Rightarrow \frac{n}{2} = y \Rightarrow n = 2y$ qui est pair.

3) $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N}$, $g \circ f$

a) $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(2n) = \frac{2n}{2} = n$.

$g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ donc injective et surjective.

b) $f \circ g(n) = f(g(n)) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(\frac{n-1}{2}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$f(g(n)) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

on a : $f\circ g(2) = f\circ g(3)$ et $2 \neq 3$ donc

$f\circ g$ n'est pas injective.

et pour $y = 3$ $\quad f\circ g(n) = 3 \Rightarrow \begin{cases} n = 3 & \text{(impossible) (n=3 pair)} \\ n-1 = 3 & \text{(impossible car n impair)} \end{cases}$

donc $\nexists n \in \mathbb{N} \,/\, f\circ g(n) = 3$ par suite

$f\circ g$ n'est pas surjective.

EXO3 $\quad E = \mathbb{R}^2$

$\forall (x,y),(x',y') \in E,\ (x,y)R(x',y') \Leftrightarrow \exists a>0, \exists b>0,\ x' = ax$ et $y' = by$

1) R est une relation d'équivalence

a) R reflexive

$\forall (x,y) \in E,\ x = 1.x$ et $y = 1.y \Rightarrow (x,y)R(x,y)$.

b) R symétrique $\forall (x,y),(x',y') \in E$.

$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow \exists a>0, \exists b>0,\ x' = ax$ et $y' = by$.

$\Rightarrow \exists a' = \frac{1}{a} > 0,\ \exists b' = \frac{1}{b} > 0,\ x = a'x'$ et $y = b'y'$

$\Rightarrow (x',y')\ R(x,y)$.

c) R transitive $\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in E$

$\begin{cases} (x,y)R(x',y') \Rightarrow \exists a>0, \exists b>0,\ x' = ax \text{ et } y' = by \quad \ldots (1) \\ \text{et } (x',y')R(x'',y'') \Rightarrow \exists a'>0, \exists b'>0,\ x'' = a'x' \text{ et } y'' = b'y' \quad \ldots (2) \end{cases}$

de (1) et (2) on aura

$x'' = aa'x$ et $y'' = bb'y$ avec $aa' > 0$ et $bb' > 0$

donc $\exists a'' = aa'$ et $b'' = bb' > 0$, $x'' = a''x$ et $y'' = b''y$. d'où

$(x,y)R(x'',y'')$.

2) $\dot{\overline{(1,0)}} = \{(x,y) \in E \,/\, (x,y)R(1,0)\}$

$= \{(x,y) \in E \,/\, ax = 1 \text{ et } by = 0\}$

$= \{(x,0) \,/\, x > 0\}$ est une demi droite positive

$\dot{\overline{(0,-1)}} = \{(x,y) \in E \,/\, ax = 0 \text{ et } by = -1\}$.

$= \{(0,y) \,/\, y < 0\}$ demi droite negative

$\overset{\circ}{\widehat{(1,1)}} = \{(x,y) \in E \ / \ ax = 1 \text{ et } by = 1\}$

$= \{(x,y) \in E \ / \ x > 0, \ y > 0\}$ le quart de plan.

3) Les classes d'équivalences de R d'après la question 2°) on obtient :

1er cas si $x = y = 0$

$\overset{\circ}{\widehat{(0,0)}} = \{(0,0)\}$

2ème cas si $x = 0$ et $y > 0$

$\overset{\circ}{\widehat{(x,y)}} = \{(0,y) \ / \ y > 0\}$ demi droite $= \overset{\circ}{\widehat{(0,1)}}$

3ème cas si $x = 0$ et $y < 0$

$\overset{\circ}{\widehat{(x,y)}} = \{(0,y) \ / \ y < 0\} = \overset{\circ}{\widehat{(0,-1)}}$

4ème cas si $x > 0$ et $y = 0$

$\overset{\circ}{\widehat{(x,y)}} = \{(x,0) \ / \ x > 0\} = \overset{\circ}{\widehat{(1,0)}}$

5ème cas si $x < 0$ et $y = 0$

$\overset{\circ}{\widehat{(x,y)}} = \{(x,0) \ / \ x < 0\} = \overset{\circ}{\widehat{(-1,0)}}$

6ème cas $x > 0$, $y > 0$

$\overset{\circ}{\widehat{(x,y)}} = \{(x,y) \in E \ / \ x > 0, \ y > 0\}$, $\frac{1}{4}$ de plan $= \overset{\circ}{\widehat{(1,1)}}$

7ème cas $x < 0$ et $y < 0$

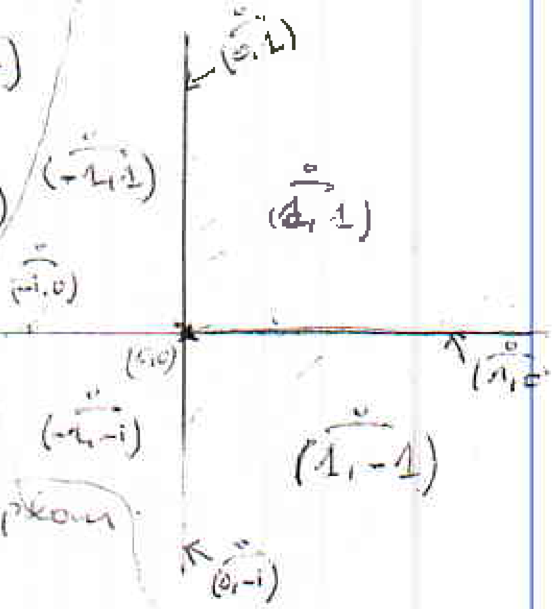
$\overset{\circ}{\widehat{(x,y)}} = \{(x,y) \in E \ / \ x < 0 \text{ et } y < 0\} = \overset{\circ}{\widehat{(-1,-1)}}$

8ème cas $x > 0$ et $y < 0$

$\overset{\circ}{\widehat{(x,y)}} = \{(x,y) \in E \ / \ x > 0 \text{ et } y < 0\} = \overset{\circ}{\widehat{(1,-1)}}$

9ème cas $x < 0$ et $y > 0$

$\overset{\circ}{\widehat{(x,y)}} = \{(x,y) \ / \ x < 0 \text{ et } y > 0\} = \overset{\circ}{\widehat{(-1,1)}}$



D'où l'ensemble quotient

$\mathbb{R}^2/R = \{\overset{\circ}{\widehat{(x,y)}} \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{\overset{\circ}{\widehat{(0,0)}}, \overset{\circ}{\widehat{(1,0)}}, \overset{\circ}{\widehat{(0,1)}}, \overset{\circ}{\widehat{(-1,0)}}, \overset{\circ}{\widehat{(0,-1)}}, \overset{\circ}{\widehat{(1,1)}}, \overset{\circ}{\widehat{(-1,-1)}}, \overset{\circ}{\widehat{(1,-1)}}, \overset{\circ}{\widehat{(-1,1)}}\}$

Question de Cours

1) $(G,*)$ est un groupe abélien ssi

- $(*)$ L.C.I sur G, avec $G \neq \emptyset$.
- $(*)$ associative et commutative.
- $\exists\, e$ elts neutre,
- tout elts de G admet un symétrique dans G.

2) caractérisation d'elts neutre

$\exists\, e \in G\ \forall x \in G,\quad x * e = e * x = x$.

soient e_1, e_2 deux elts neutre de $(G,*)$.

$e_1 = e_1 * e_2$ (car e_2 elts neutre)

$= e_2$ (car e_1 elts neutre)

d'où l'unicité.

3) caractérisation de l'elt symétrique

$\forall x \in G\ \exists x' \in G,\quad x * x' = x' * x = e$.

Soit x_1', x_2' deux elts symétrique de x dans G.

on a $x * x_1' = e$ et $x_2' * x = e$

$x_2' = x_2' * e = x_2' * (x * x_1') = (x_2' * x) * x_1'$ (car $*$ associative)

$= e * x_1' = x_1'$

d'où l'unicité.