Fonctions presque périodiques

Cours, $1^{\text{ère}}$ année master mathématiques.
Option : Analyse Mathématiques

Fatiha BOULAHIA épouse TALBI [1].

1. Pour toute remarque, suggestion ou correction concernant ce document, merci de me contacter à cet e-mail : boulahia_fatiha@yahoo.fr
Le seul vrai savoir est de savoir que l'on ne sait rien

Table des matières

1

Les fonctions périodiques

1.1 Généralités sur les fonctions périodiques

1.1.1 Définitions exemples et opérations sur les fonctions périodiques

Définition 1.1. *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite **périodique** s'il existe un nombre $T > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x). \tag{1.1}$$

On dit alors que T est une période de f.

Si T est le plus petit nombre positif qui vérifie (1.1) alors f est dite $T-$périodique.

Autrement dit, f est $T-$périodique si et seulement si son graphe est invariant par une translation de vecteur (kT, o), avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.1. *Les fonctions définies par :*

1. $x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos nx, x \mapsto \sin nx, x \mapsto \exp(inx), x \mapsto \sum\limits_{|k|\leq N} c_k \exp(ikx)$ *sont périodiques de période 2π et elles sont continues.*
2. $f(x) = x - [x]$, *($[x]$ désigne la partie entiére de x) est $1-$périodique mais elle n'est pas continue.*
3. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = 1 + |2k - x|\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in [2k-1, 2k+1]\,,$$

est $2-$périodique.

En effet, si $x \in [2k-1, 2k+1]$ alors $x + 2 \in [2(k+1) - 1, 2(k+1) + 1]$. Donc

$$f(x+2) = 1 + |2(k+1) - (x+2)| = f(x)$$

Définition 1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction donnée. On définit par*

$$P_f = \{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)\}$$

P_f est appelé ***groupe des périodes*** *de f.*

Proposition 1.1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction périodique, alors P_f est un sous groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$.*

Démonstration. P_f est non vide, car $0 \in P_f$.

Soient T et T' deux nombres de P_f , alors on a : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x+T) = f(x) \\ f(x+T') = f(x) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(x+(T-T')) &= f((x+T)-T') \\ &= f(x+T) = f(x). \end{aligned}$$

Alors : $T - T' \in P_f$.

Par conséquent P_f est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. □

Remarque 1.1.

1. *Si $P_f = \{0\}$ alors f n'est pas périodique.*
2. *Si $P_f \neq \{0\}$ alors f est périodique.*
3. *Si $P_f = \mathbb{R}$ alors f est constante.*
4. *Si $P_f = a\mathbb{Z}$ $(a > 0)$ alors la plus petite période de f est a (ou f est $a-$périodique.)*
5. $P_{\cos} = P_{\sin} = 2\pi\mathbb{Z}, \quad P_{\cos^2} = P_{\sin^2}\pi\mathbb{Z}$

Opérations sur les fonctions périodiques

Proposition 1.2. *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions $T-$périodiques et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors :*

1. *$\alpha f + \beta g$ est $T-$périodique.*
2. *Si $g \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est $T-$périodique.*
3. *Si g est définie sur l'image de f alors $g \circ f$ est $T-$périodique.*

Démonstration. Exercice □

1.1.2 Propriétés des fonctions périodiques

Lemme 1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $T-$périodique et a, b deux nombres réels positifs $a \neq 0$. Alors la fonction définie par :*

$$g : x \mapsto g(x) = f(ax+b)$$

est périodique de période $\frac{T}{a}$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} g(x+\frac{T}{a}) &= f(a(x+\frac{T}{a})+b) = f(ax+T+b) \\ &= f(ax+b) = g(x). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.2. *On peut ramener l'étude des fonctions $T-$périodiques à celles des fonctions $2\pi-$périodiques. En effet, si f est $T-$périodique alors la fonction*

$$g : x \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

est 2π périodique. En effet,

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x+T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x)$$

Théorème 1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et soit a, b deux réels, alors :*
Si f est croissante (resp décroissante) sur $[a, b]$, alors f est croissante (resp décroissante) sur $[a+T, b+T]$.

Démonstration. On montre seulement le résultat quand la fonction f est T-périodique et croissante.

Soit x, y deux réels de l'intervalle $[a+T, b+T]$ tels que $x < y$. Alors $x - T \in [a, b]$ et $y - T \in [a, b]$. De plus, $x - T < y - T$.

Puisque f est croissante sur $[a, b]$, alors :

$$f(x-T) < f(y-T)$$

Comme f est périodique alors $f(x) < f(y)$.

D'ou le résultat.

Montrer le cas où f est décroissante en exercice. □

Proposition 1.3. *Toute fonction T-périodique continue est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit f une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$. Alors f est continue sur le segment $[0, T]$ et donc elle est bornée sur ce segment. Par suite f est bornée sur $\mathbb{R}$ par la périodicité.

Montrons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur le segment $[\frac{-T}{2}, \frac{3T}{2}]$. Alors d'après le théorème de HEINE, f est uniformément continue sur ce segment. C'est à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x_1, x_2 \in [\frac{-T}{2}, \frac{3T}{2}]$

$$|x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \min\left\{\eta, \frac{T}{2}\right\}$. Alors il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nT \leq x \leq (n+1)T$ c-à-d $x - nT \in [0, T]$. Puisque $|x-y| \, \frac{T}{2}$ alors

$$nT - \frac{T}{2} \leq y \leq (n+1)T + \frac{T}{2} = nT + \frac{3T}{2},$$

c-à-d $y - nT \in [\frac{-T}{2}, \frac{3T}{2}]$.

Comme $|(x - nT) - (y - nT)| = |x - y| < \eta$, alors d'après l'uniforme continuité de f sur $[\frac{-T}{2}, \frac{3T}{2}]$ on aura $|f(x - nT) - f(y - nT)| < \varepsilon$, et donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ce qui donne l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$. □

Théorème 1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $T-$ périodique et continue. Alors son intégrale sur un intervalle de longueur de T ne dépend pas de l'intervalle choisi. Autrement dit,*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt.$$

Démonstration. Par la relation de **Chasles** on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{\alpha}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt + \int_{T}^{a+T} f(t)dt.$$

Posons : $t = T + z$, alors $dt = dz$ et

$$\int_{T}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(T + z)dz = \int_{0}^{\alpha} f(z)dz.$$

Ce qui donne

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{\alpha}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt + \int_{0}^{\alpha} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt.$$

□

Remarque 1.3. *On utilise fréquemment cette propriété, en choisissant la période la plus propice (favorable), c.-à-d. celle rendant le calcul simple. Par exemple, si une fonction f est périodique et impaire, alors $\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 0$ et donc $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.*

La valeur moyenne d'une fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T. On définit sa valeur moyenne par :

$$M(f) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)dx = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} f(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.

1. *La fontion* " cos" *est de moyenne nulle. En effet,*

$$M(\cos) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \cos x dx = \frac{1}{2\pi} \sin x|_{0}^{2\pi} = 0.$$

2. *La fonction* " $\cos^2$" *est de moyenne $\frac{1}{2}$. En effet,*

$$\begin{aligned} M\left(\cos^2\right) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Insuffisances des fonctions périodiques

Proposition 1.4. *L'ensemble des fonctions périodiques continues sur* $\mathbb{R}$ *n'est pas stable pour l'addition.*

Démonstration. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \exp(ix) + \exp(i\sqrt{2}x).$$

Elle s'écrit comme la somme de deux fonctions périodiques, l'une de période 2π, l'autre est de période $\sqrt{2}\pi$, mais elle n'est pas périodique.

Pour le montrere raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $\tau \neq 0$ tel que

$$f(x+\tau) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire

$$\exp(ix)\exp(i\tau) + \exp(i\sqrt{2}x)\exp(i\sqrt{2}\tau) = \exp(ix) + \exp(i\sqrt{2}x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ce qui implique que

$$\exp(ix)(\exp(i\tau)-1) + \exp(i\sqrt{2}x)(\exp(i\sqrt{2}\tau)-1) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

En dérivant (1.2)par rapport à x on obtient

$$i\exp(ix)(\exp(i\tau)-1) + \sqrt{2}i\exp(i\sqrt{2}x)(\exp(i\sqrt{2}\tau)-1) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x = 0$ on aura

$$\exp(i\tau) - 1 + \sqrt{2}(\exp(i\sqrt{2}\tau)-1) = 0.$$

Ceci donne, avec l'équation (1.2) évaluée en $x = 0$

$$\exp(i\tau) = \exp(i\sqrt{2}\tau) = 1.$$

Donc, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau = 2k_1\pi$ et $\tau = \sqrt{2}k_2\pi$, comme $\tau \neq 0$, on obtient

$$\sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Ce qui est absurde. □

Proposition 1.5. *L'ensemble des fonctions continues périodiques n'est pas stable par limite uniforme.*

Démonstration. Il suffit de considérer la suite de fonctions

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\sin^2\left(\pi\frac{x}{2^k}\right).$$

La fonction f_n admet 2^n pour période. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n\left(x+2^n\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\sin^2\left(\pi\frac{x+2^n}{2^k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\sin^2\left(\pi\frac{x}{2^k}+\pi 2^{n-k}\right)=f_n\left(x\right)$$

ceci découle du fait que la fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est périodique de période π

La série $\sum\limits_{n}\frac{1}{2^k}\sin^2\left(\pi\frac{x}{2^k}\right)$ est normalement convergente car $\left|\frac{1}{2^k}\sin^2\left(\pi\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq \frac{1}{2^k}$ qui est le terme générale d'une série convergente. Donc la série $\sum\limits_{n}\frac{1}{2^k}\sin^2\left(\pi\frac{x}{2^k}\right)$ est uniformément convergente. Notons f sa somme c-à-d

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sin^2\left(\pi\frac{x}{2^k}\right).$$

On suppose que f est périodique alors il existe un $T>0$ tel que

$$f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

En particulier $f(T)=f(0)=0$. Donc pour tout entier $k\geq 1$ on aura $\sin^2\left(\pi\frac{T}{2^k}\right)=0$ d'où $\pi\frac{T}{2^k}\in\pi\mathbb{Z}$ donc $T\in 2^k\mathbb{Z}$ pour tout entier $k\geq 1$. Ceci est impossible car $T\neq 0$. □

Ces insuffisances de la périodicité ont poussé les mathématiciens à définir les fonctions dite "presque périodiques". L'étude de ces fonctions fera l'objet du deuxième chapitre.

Dérivée et primitive d'une fonction périodique

Proposition 1.6. *Soit f une fonction $T-$ périodique et derivable alors sa dérivée est T-périodique de moyenne nulle.*

Démonstration. Exercice □

Exemple 1.3. *La fonction donnée par : $x \longmapsto \sin x$ est de classe C^1, sa dérivée est de classe C^1 . De plus, on a :*

$$M\left(\sin'\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x dx=0$$

Proposition 1.7. *Une fonction f continue et T-périodique admet une primitive $T-$périodique si et seulement si elle est de moyenne nulle.*

Proposition 1.8. *Soient f,g deux fonctions continues et $T-$périodiques alors*

$$<f,g>=\frac{1}{T}\int_0^T\overline{f(x)}g(x)dx$$

est un produit scalaire.

1.2 Série de Fourier d'une fonction périodique

1.2.1 Les polynômes trigonométriques

Les fonctions trigonométriques *cosinus* et *sinus* sont périodiques de période 2π. On pose $w = \frac{2\pi}{T}$ et on appelle ce nombre **la pulsation.** Les fonctions $\cos(wnx)$ et $\sin(wnx)$, pour un entier $n \geq 1$ sont périodiques de période T.

Définition 1.3. *On appelle polynôme trigonométrique une combinaison linèaire* ***finie*** *des fonctions cosinus et sinus. Autrement dit*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_n \sin(kx))$$

P est une fonction périodique de période 2π.

Au lieu d'utiliser les fonctions *cosinus* et *sinus* on peut utiliser les fonctions exponentielles complexes et cela grâce aux formules d'Euler suivantes :

$$\begin{cases} \cos(kx) = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} \\ \sin(kx) = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i} \end{cases}$$

Ainsi un polynôme trigonométrique peut aussi s'écrire

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Les Séries trigonométriques

Définition 1.4. *On appelle série trigonométrique réelle toute série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n\geq 0} a_{nwx} \cos nt + b_n \sin(nwx) \tag{1.3}$$

avec $x \in \mathbb{R}, w > 0, a_n, b_n \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Représentation complexe d'une série trigonométrique *: En utilisant les formules d'Euler et en posant*

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ et } C_0 = \frac{a_0}{2},$$

la série de Fourier (1.3) peut s'écrire

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \exp(inx) + C_{-n} \exp(-inx)] &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(inx) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \exp(-inx) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(inx) + \sum_{-\infty}^{1} C_{-n} \exp(inx) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n \exp(inx). \end{aligned}$$

Série de Fourier d'une fonction périodique continue

Soit f une fonction $T-$périodique et continue. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique

$$\mathcal{F}(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{iwnx}$$

Avec

$$w = \frac{2\pi}{T} \text{ et } c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-iwnt}dt$$

$c_n(f)$ sont les coeficients de Fourier exponentiels de f.

La série de Fourier peut aussi s'exprimer

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(f)\cos(wnx) + b_n(f)\sin(wnx)\right].$$

Avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx, \\ a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(wx)dx, \\ b_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(wx)dx. \end{aligned}$$

Les $a_n(f)$ et les $b_n(f)$ sont les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Remarque 1.4. *Quand la fonction f est continue et périodique de période 2π, alors ses coefficients de Fourier sont donnés par :*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt. \end{aligned}$$

Egalité de Parseval. Soit f une fonction 2π-périodique continue. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Exemple 1.4. *Soit la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Les coefficients de Fourier de f.
$a_n = 0, \ \forall n \geq 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\left[(1-\cos(-n\pi)) - \cos(n\pi) + 1\right] \\ &= \begin{cases} 0 & si\ n\ est\ paire \\ \frac{4}{n\pi} & si\ n\ est\ impaire. \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Propriétés des coefficients de Fourier

Soit f, g deux fonctions $T-$périodiques et contiues. Alors

1. $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$
2. $c_n(f \star g) = c_n(f).c_n(g)$ $\quad\star$ désigne le produit de convolution.
3. Si f est de classe C^p sur $[0, T]$ alors
$$c_n(f^{(p)}) = (in)^p.c_n(f)$$
4. Si f est paire alors $b_n = 0, \ \forall n \geq 1$, et sa série de Fourier est :
$$F(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi nx}{T}).$$
5. Si f est impaire alors $a_n = 0, \ \forall n \geq 0$. Par conséquent,
$$F(f) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{2\pi nx}{T}).$$

Exemple 1.5.

1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-\pi)^2$.*
f est $2\pi-$périodique et sa série de Fourier est
$$F(f) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$
En effet, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos nx dx$. En faisant une intégration par partie deux fois on trouve $a_n = \frac{-4}{n^2}$.
et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\sin(nx)dx = 0$.

2. *La série de Fourier de la fonction $2\pi-$périodique f définie sur $[-\pi,\pi]$ par*

$$f(x)=\cos(\alpha x)$$

est donnée par

$$F(f)=\frac{1}{\alpha\pi}\sin(\alpha\pi)+\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.$$

En effet, $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\alpha\pi}\sin\alpha\pi,\ b_n=0,\ \forall n\geq 0$ *et*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2\,(-1)^n\,\alpha\sin\alpha\pi}{\pi\,(\alpha^2-n^2)}.$$

1.2.2 Série de Fourier et noyau de Dirichlet

Noyau de Dirichlet

Soit $n\in\mathbb{N}$; on appelle noyau de Dirichlet d'indice n la fonction D_n définie par

$$D_n\,(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}.$$

La fonction D_n est périodique de période 2π.

Proposition 1.9.

1. $D_n(x)=\begin{cases}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} & si\ \ x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ 2n+1 & si\ \ x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}$
2. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n(y)dy=1.$

Démonstration. A faire en exercice □

Série de Fourier et noyau de Dirichlet

Soit f une fonction $2\pi-$périodique et continue. On note $S_n(f)(x)$ la $n-^{\text{ieme}}$ somme partielle de la série de Fourier de f. C'est à dire :

$$\begin{aligned}S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(t)e^{-iwnt}dt)e^{iwnx}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(f\,(x)\,e^{ik(x-t)}\right)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\,(x)\,D_n\,(x-t)\,dx=\frac{1}{2\pi}\,(f*D_n)\,(x)\,.\end{aligned}$$

Comme $f*D_n=D_n*f$ on obtient $S_n(f)=\frac{1}{2\pi}D_n*f$

1.2.3 Théorème de Fejèr

Convergence au sense de Cesaro

Définition 1.5. *On appelle suite des moyennes de Cesaro associée à une suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite*

$$\sigma_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}, \quad n \geq 1.$$

Où

$$\sigma_n = \frac{u_o + u_2 + ... + u_n}{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Remarque 1.5.

1. *Si la suite* $(u_n)_n$ *converge vers une limite* l*, alors la suite* $(\sigma_n)_n$ *converge aussi vers la même limite* l*.*
2. *La suite* $(\sigma_n)_n$ *peut converger sans que la suite* $(u_n)_n$ *ne soit convergente.*
3. *Quand la suite* $(\sigma_n)_n$ *converge, on dira que la suite* $(u_n)_n$ *converge au sens de Cesaro.*

Exemple 1.6. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $(u_n) = (-1)^n$ *est divergente. La suite*

$$(\sigma_n)_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2\,(n+1)} = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k+1 \\ \frac{1}{n+1} & si \quad n = 2k \end{cases}$$

La suite $(\sigma_n)_n$ *converge vers zéro. C'est-à-dire la suite* $(u_n)_n$ *converge au sens de Cesaro vers zéro.*

Noyau de Fejèr

On appelle noyau de Fejèr la suite des moyennes de Cesaro associée à la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Avec

$$D_n\,(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

C'est-à-dire

$$F_n\,(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k\,(x)$$

Propriétés du noyau de Fejèr

1. Le noyau de Fejèr peut s'écrire

$$F_n\,(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si} \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si} \quad x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

2. $F_n\,(x) \geq 0,$
3. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n\,(x)\,dx = 1$
4. $\forall\delta > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\delta\leq|x|\leq\pi} F_n\,(x)\,dx = 0$

Démonstration. Voir TD □

Noyau de Fejèr et série de Fejèr

Soit f une fonction 2π périodique et intégrable. On note $\sigma_n(f)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des moyennes de Cesaro de la suite des somme partielles $\big(S_n(f)_{n\in\mathbb{N}}$ de la série de Fourier de f. On a

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f)(x) &= \frac{S_0(f)(x)+S_1(f)(x)+...+S_n(f)(x)}{n+1}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} c_l(f)\,e^{ilx} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-k}^{k}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ilt}dx\right)e^{ikx}\\
&= \frac{1}{2(n+1)\pi}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi}\left(f(x)\sum_{l=-k}^{k} e^{il(x-t)}\right)dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,F_n(x-t)\,dx = \frac{1}{2\pi}(F_n * f)(x)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{2\pi}(F_n * f) \tag{1.4}$$

La convergence des sommes de Cesaro (ou somme de Féjer) $(\sigma_n(x))_n$ vers la fonction f

est donnée pa le théoréme de Fejér. Ce théoréme est l'un des principaux résultats de la théorie des séries de Fourier. Il a été demontré par le mathématicien Lipot Fejér en 1900. Ce théorème est généralisé au cas des fonctions presque périodiques il porte le nom du théorème de Bochner Fejèr.

Théorème 1.3. ***Théorème de Fejér***
Soit f une fonction $2\pi-$périodique et continue. Alors la suite $(\sigma_n(f))_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

Démonstration. On doit montrer que $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq n_0$ on a

$$|\sigma_n(f)(x)-f(x)| < \varepsilon,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Soit $\varepsilon>0$ donné, comme la fonction f est continue sur $[-\pi,\pi]$ il existe $\delta>0\,(\delta<\pi)$ tel que

$$\forall x,y,\ |x-y|<\delta\ \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

En utilisant (1.4) et les propriétés du noyau de Fejèr on aura

$$\begin{aligned}
|f(x)-\sigma_n(f)(x)| &= |f(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)dt|\\
&= |f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)dt|\\
&= \frac{1}{2\pi}|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x-t))\,F_n(t)dt|\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt
\end{aligned}$$

On veut montrer que cette quantité tend vers zéro quand $n \to +\infty$ indépendamment de x.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de f et la propriété (3) du noyau de Fejèr on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.5}$$

On pose $A = [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Donc

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt + \int_{\delta}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{A}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt$$

L'application de la propriété (4) du noyau de Fejèr nous donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{A}|f(x)-f(x-t)|F_n(t)dt \leq 2\|f\|_\infty\frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

En utilisant les inégalités (1.5) et (1.6) on obtient $\forall n \geq n_0$

$$|f(x) - \sigma_n(f)(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Finalement, on a montré que toute fonction périodique est limite uniforme d'une suite de polymômes trigonométriques.