

Chapitre 2 : Les fonctions presque périodiques

Par Talbi-Boulahia Fatiha

0.1 Introduction

Afin de décrire le mouvement des planètes, les astronomes en particulier E. Elsclangon en 1902, ont introduit les fonctions presque périodiques. Mais leur apparition formelle remonte aux travaux du mathématicien danois H. Bohr au début des années vingt (1924 – 1925).

Ces fonctions ont des propriétés voisines de celles des fonctions périodiques, en fait on a une périodicité approximative dans le sens que pour tout x réel, l'écart $f(x + T) - f(x)$, où T est un nombre réel positif, peut être rendu de plus en plus petit. Elles sont des fonctions qui possèdent de nombreuses presque périodes. Elles apparaissent naturellement dès qu'on est en présence de plusieurs mouvements périodiques simultanés (par exemple deux ressorts d'élasticité différentes accrochés à deux masses différentes).

Cette classe de fonctions possède une structure d'algèbre et se prête donc mieux à une étude globale par les méthodes de l'analyse fonctionnelle. L'une des propriétés importantes des fonctions presque périodiques est d'admettre un développement en série de Fourier généralisée.

La notion de presque-périodicité a été généralisée dans diverses directions : les fonctions presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach, les fonctions presque périodiques dans le cadre de espaces de Lebesgue L^p et $L^{p(\cdot)}$ et dans le cadre des espaces d'Orlicz.

Dans ce module on s'intéressera seulement aux fonctions presque périodiques de Bohr numériques (à valeurs dans $\mathbb{C}$).

Il existe trois différentes définitions des fonctions **presque périodiques de Bohr** :

1. Définition utilisant les ensembles relativement denses (propriété de translation).
2. Critère d'**approximation** en utilisant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés relativement à la norme uniforme.
3. Critère de **Bochner** en utilisant la compacité de l'ensemble des translatés.

0.2 Définitions et propriétés des fonctions presque périodiques de Bohr

0.2.1 Les fonctions presque périodiques en utilisant les ensembles relativement denses

Ensemble relativement dense

Définition 0.2.1. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense, s'il existe un nombre positif l tel que tout intervalle de longueur l contient au moins un élément de E . Autrement dit,

$$\exists l > 0, \text{ tel que, }]a, a + l[\cap E \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Le nombre l est appelé **longueur d'inclusion** de la partie E .

Exemple 0.2.1.

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Puisque tout intervalle de longueur 2 contient un élément de $\mathbb{Z}$.
2. Pour tout réel T , l'ensemble $\{nT, n \in \mathbb{Z}\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas relativement dense puisque pour tout $\ell > 0$, il existe un $\alpha = -2\ell$ tel que

$$[-2\ell, -2\ell + \ell] \cap \mathbb{N} = \emptyset.$$

4. Toute partie qui est dense dans $\mathbb{R}$ au sens de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est relativement dense. En effet, par définition une partie A de $\mathbb{R}$ est dense si tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ rencontre A (tout point de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}$).

Remarque 0.2.1. Toute partie d'un ensemble relativement dense est relativement dense.

Définition 0.2.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction **continue**.

On dit que f est presque périodique au sens de **Bohr** si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $E\{\varepsilon, f\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$, où

$$E\{\varepsilon, f\} = \left\{ T \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon \right\}$$

Autrement dit,

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[a, a + \ell_\varepsilon]$ contient un nombre T satisfaisant

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Un nombre T qui appartient à $E\{\varepsilon, f\}$ est appelé ε -**presque périodique** ou ε -**nombre de translation** de la fonction f .

Le nombre ℓ_ε est appelé **longueur d'inclusion** de $E\{\varepsilon, f\}$.

Notons par $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace de toutes les fonctions presque périodiques au sens de **Bohr** définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exemple 0.2.2.

1. Une fonction périodique continue est presque périodique.
2. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x + \sin \sqrt{2}x \end{aligned}$$

Démonstration. A justifier en TD

□

0.2.2 Les propriétés des fonctions presque périodiques

La définition des fonctions presque périodiques implique quelques propriétés utiles similaires à celles des fonctions périodiques.

Proposition 0.2.1. *Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors f est bornée et uniformément continue.*

Démonstration.

i La bornitude de f .

Supposons que f est une fonction presque périodique. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$ contient un nombre T vérifiant

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + T) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Comme par hypothèse f est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle atteint ses bornes sur tout compact de $\mathbb{R}$. En particulier, il existe $M > 0$, tel que

$$\sup_{x \in [0, \ell_\varepsilon]} |f(x)| \leq M.$$

On prend $T \in [-x, -x + \ell_\varepsilon]$ une ε - **presque périodique**, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x + T) - f(x)| < \varepsilon,$$

il vient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x + T) + f(x + T)| \\ &\leq |f(x) - f(x + T)| + |f(x + T)| \\ &\leq \varepsilon + M. \end{aligned}$$

Donc f est bornée.

ii La continuité uniforme de f . Soit $\varepsilon > 0$, et $\ell = \ell_\varepsilon$ la longueur d'inclusion de $E(\frac{\varepsilon}{3}, f)$. Comme f est uniformément continue sur $[-1, 1 + \ell]$, alors il existe $0 < \delta < 1$, tel que

$$\forall x, y \in [-1, 1 + \ell], \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, si $T \in [-x, -x + \ell]$ avec T une $\frac{\varepsilon}{3}$ - presque périodique de f , on a

$$|f(x + T) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a $-x \leq T \leq -x + \ell$ alors $0 \leq T + x \leq \ell$ donc $T + x \in [0, \ell] \subset [-1, 1 + \ell]$

et $-x + y \leq T + y \leq -x + y + l$ alors

$$0 < -\delta \leq T + y \leq \delta_\varepsilon + l \leq 1 + l$$

Donc $T + y \in [-1, 1 + l]$

Par conséquent, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, avec $|x - y| < \delta$, on aura

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) + f(x + T) - f(x + T) - f(y + T) + f(y + T) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(x + T)| + |f(x + T) - f(y + T)| + |f(y) - f(y + T)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

□

Proposition 0.2.2. *Propriétés de l'ensemble des nombres de translation.*

Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

1. $E\{\varepsilon, f\} \subset E\{\varepsilon', f\}$, $\forall \varepsilon < \varepsilon'$.
2. $E\{\varepsilon, f\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
3. $E(f_\alpha, \varepsilon) = E(f, \varepsilon)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire, $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est invariant par translation.

Démonstration. A faire en TD

□

Proposition 0.2.3. *Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors*

$$\text{Im } f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact, c'est-à-dire $\overline{\text{Im } f}$ est compact.

Démonstration. Supposons que f est une fonction presque périodique et montrons que $\text{Im } f$ est **relativement compact**. C'est à dire montrons que pour toute suite de $\text{Im } f$, on peut extraire une sous suite convergente dans $\text{Im } f$.

Comme $\mathbb{C}$ est complet alors la compacité relative coïncide avec la **précompacité**. Donc il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon ε dans $\mathbb{C}$ telles que leurs réunion couvre l'ensemble $\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\ell > 0$ la longueur d'inclusion associée à f .

Comme f est continue sur $[0, \ell]$, on en déduit que l'ensemble $\{f(x), x \in [0, \ell]\}$ est un compact dans $\mathbb{C}$.

C'est-à-dire

$$\{f(x), x \in [0, \ell]\} = \bigcup_{p=1}^n B(x_p, \varepsilon).$$

Prenons $x_1, x_2, \dots, x_n$ les centres des boules qui couvrent $\{f(x), x \in [0, \ell]\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et τ un ε -nombre de translation dans l'intervalle $[-x, -x + \ell]$.

Comme $x + \tau \in [0, \ell]$, alors il existe un entier $p \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$f(x + \tau) \in B(x_p, \varepsilon).$$

C'est à dire

$$|f(x + \tau) - x_p| \leq \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned} |f(x) - x_p| &= |f(x) - f(x + \tau) + f(x + \tau) - x_p| \leq |f(x) - f(x + \tau)| + |f(x + \tau) - x_p| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon'. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{Im } f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{p=1}^n B(x_p, \varepsilon).$$

□

Proposition 0.2.4. *Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions presque périodique converge uniformément dans $\mathbb{R}$ vers une fonction f , alors f est aussi presque périodique.*

Démonstration. On a $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément dans $\mathbb{R}$ vers f . Alors, pour un ε donné, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

En particulier, il existe une fonction f_{n_0} telle que

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit maintenant un nombre $T \in E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0}\right\}$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x + T) - f(x)| &\leq |f(x + T) - f_{n_0}(x + T)| + |f_{n_0}(x + T) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \\ &\leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0}\right\} \subset E\{\varepsilon, f\}$. Donc $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. □

0.2.3 Définition de la presque périodicité par le critère d'approximation

Définition 0.2.3. On appelle **polynôme trigonométrique généralisé**, toute combinaison de la forme

$$\sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x} \text{ avec, } a_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

On note par $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces polynômes.

Définition 0.2.4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction **continue**. On dit que f possède la propriété d'approximation si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un **polynôme trigonométrique généralisé** $P_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui est équivalent à dire que f possède la propriété d'approximation s'il existe une suite de polynômes trigonométriques généralisés $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f .

0.2.4 Propriétés des fonctions presque périodiques

Proposition 0.2.5.

1. L'espace $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ a une structure d'espace vectoriel, c'est à dire :
 - (a) Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $\alpha f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour tout réel α .
 - (b) Si $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $f + g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors
 - (a) $|f| \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
 - (b) si g est uniformément continue alors $(g \circ f) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Démonstration.

1. Montrons que $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel réel.
 - (a) Soit f une fonction presque périodique, montrons que αf est presque périodique.
 Soit $T \in E\left\{\frac{\varepsilon}{|\alpha|}, f\right\}$. Alors
 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\alpha f(x+T) - \alpha f(x)| &= |\alpha| \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \\ &\leq |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où $E\left\{\frac{\varepsilon}{|\alpha|}, f\right\} \subset E\{\varepsilon, \alpha f\}$.

Par la remarque 0.2.1, l'ensemble $E\left\{\frac{\varepsilon}{|\alpha|}, f\right\}$ est relativement dense.

Donc $\alpha f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- (b) Soit $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe deux polynômes trigonométriques P et Q tels que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon \text{ et } \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - Q(x)| \leq \varepsilon.$$

Avec l'inégalité triangulaire, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|(f+g) - (P+Q)| = \|f - P\|_{\infty} + \|g - Q\|_{\infty} \leq 2\varepsilon.$$

2. On a f une fonction presque périodique, c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_{\varepsilon} > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_{\varepsilon}]$ contient un nombre T vérifiant

$$E(\varepsilon, f) = \left\{ T \in \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon \right\}$$

Comme

$$||f(x+T)| - |f(x)|| \leq |f(x+T) - f(x)|,$$

ce qui implique que,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} ||f(x+T)| - |f(x)|| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc $|f| \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3. On a $g \circ f$ est continue car f est continue et g est uniformément continue.

Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, c'est à dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre T satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x+T) - f(x)| < \varepsilon.$$

g est une fonction uniformément continue, c'est-à-dire $\forall \varepsilon' > 0$, il existe $\eta > 0$ (η ne dépend que de ε'), $\forall x, y \in \mathbb{C}$, tels que $|x - y| < \eta$, implique

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - g(y)| < \varepsilon'.$$

Il suffit juste de prendre $\varepsilon = \eta$, ce qui implique que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(f(x+T)) - g(f(x))| < \varepsilon'.$$

Donc $g \circ f$ est presque périodique.

□

Dérivation et intégration des fonctions presque périodiques

Proposition 0.2.6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction presque périodique et dérivable.

f' est presque périodique si et seulement si f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La première implication est évidente car toute fonction presque périodique est uniformément continue.

On cherche à écrire f' comme une limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques. On sait que pour tout réel x , on a

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Pour $h = \frac{1}{n}$, on a

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right)$$

Posons,

$$f_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right).$$

Il est clair que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x) - f_n(x)| \right) = 0.$$

On a,

$$\begin{aligned} |f'(x) - f_n(x)| &= \left| f'(x) - n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t) dt \right| \leq n \left| \int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(x) - f'(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [x, x+\frac{1}{n}]} |f'(x) - f'(t)| \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la continuité uniforme de f' assure l'existence d'un δ tel que si $|u - v| \leq \delta$ alors,

$$|f'(u) - f'(v)| \leq \varepsilon$$

d'où il existe un n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a $\frac{1}{n} \leq \delta$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|f'(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

D'où la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f' sur $\mathbb{R}$. Ce qui donne le résultat. □

Théorème 0.2.1. Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et F une primitive de f .

$F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si et seulement si elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La nécessité

Il est clair que si $F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors F est bornée.

La suffisance

Supposons que F est bornée et montrons que $F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On peut se restreindre au cas où f est à valeurs réelles car si

$$f = f_1 + if_2$$

où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles alors,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f_1(t)dt + i \int_0^x f_2(t)dt \\ &= F_1(x) + iF_2(x). \end{aligned}$$

$F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si et seulement si $F_1, F_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Supposons que F est bornée, notons par,

$$m = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x) \text{ et } M = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x).$$

On suppose que $m \neq M$, sinon F serait constante donc presque périodique.

Donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, il existe deux réels x_1 et x_2 tels que

$$F(x_1) < m + \frac{\varepsilon}{6} \text{ et } F(x_2) > M - \frac{\varepsilon}{6}.$$

On pose $d = |x_1 - x_2|$.

Puisque f est presque périodique, alors il existe $\ell_1 > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_1 contient un $\frac{\varepsilon}{6d}$ -nombre de translation pour f .

On montre ensuite qu'en posant $\ell = \ell_1 + d$, tout $\frac{\varepsilon}{2\ell}$ -nombre de translation pour f est un ε -nombre de translation pour F .

Dans un premier temps, on montre que tout intervalle de longueur ℓ contient deux points y_1 et y_2 tels que

$$\begin{aligned} F(y_1) &< m + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\text{et} \\ F(y_2) &> M - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

En effet, posons $\xi = \min \{x_1, x_2\}$. Soit τ un $\frac{\varepsilon}{6d}$ -nombre de translation pour f tel que $\xi + \tau \in [\alpha, \alpha + \ell_1]$, où α est un réel quelconque.

On pose, $y_1 = x_1 + \tau$ et $y_2 = x_2 + \tau$ de sorte que $y_1, y_2 \in [\alpha, \alpha + \ell]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} F(y_2) - F(y_1) &= \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt + F(x_2) - F(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \\ &= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1+\tau}^{x_2+\tau} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (f(t+\tau) - f(t)) dt \\ &\geq F(x_2) - F(x_1) - d\frac{\varepsilon}{6d} \geq M - \frac{\varepsilon}{6} - m - \frac{\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{6} = M - m - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$F(y_2) - M > F(y_1) - m - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme on a,

$$F(y_2) - M < 0 \text{ et } F(y_1) - m > 0$$

alors,

$$m + \frac{\varepsilon}{2} > F(y_1) \text{ et } F(y_2) - M > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons à présent $\eta \in E(\varepsilon, F)$, fixons un réel x , on peut trouver $y_1 \in [x, x + \ell]$ tel que

$$F(y_1) < m - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} F(x + \eta) - F(x) &= F(y_1 + \eta) - F(y_1) + \int_x^{x+\eta} f(t)dt - \int_{y_1}^{y_1+\eta} f(t)dt \\ &= F(y_1 + \eta) - F(y_1) + \int_x^{y_1} f(t)dt + \int_{y_1}^{x+\eta} f(t)dt - \int_{y_1}^{y_1+\eta} f(t)dt \\ &= F(y_1 + \eta) - F(y_1) + \int_x^{y_1} f(t)dt - \int_{x+\eta}^{y_1+\eta} f(t)dt \\ &= F(y_1 + \eta) - F(y_1) + \int_x^{y_1} f(t)dt - \int_x^{y_1} f(t + \eta)dt \\ &> -\left(m + \frac{\varepsilon}{2}\right) + m - \left| \int_x^{y_1} (f(u + \eta) - f(u))du \right| \\ &> -\frac{\varepsilon}{2} - \ell \frac{\varepsilon}{2\ell} = -\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc,

$$|F(x + \eta) - F(x)| \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat. □