

Chapitre 3 : Sur la presque périodicité des solutions d'une classe d'équations différentielles ordinaires

Par Talbi-Boulahia Fatiha

0.1 Introduction

La presque périodicité des solutions des équations différentielles a été longuement étudiée depuis le tout début du vingtième siècle.

Les ouvrages classiques de [1], [2], ... donnent une belle présentation des méthodes et des résultats sur ce sujet.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'existence des solutions presque périodiques d'un système différentiel linéaire à coefficients constants du premier ordre dont le second membre est presque périodique.

0.2 Equations différentielles linéaires ordinaires

Dans cette section on s'intéresse à l'existence des solutions presque périodiques d'un système différentielle linéaire ordinaire

$$\dot{y} = Ay + f \quad (1)$$

où $f = (f_1, \dots, f_n)^t$ telle que chaque composante $f_i \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice carrée à coefficients complexes et $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ une fonction inconnue.

Le système (1) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j + f_i(x), \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

Définition 0.2.1. Une solution du système (2) est dite presque périodiques (resp. bornée) si toutes ses composantes sont presque périodiques (resp. bornées).

0.3 Solutions presque périodique d'une équation différentielle scalaire

Théorème 0.3.1. Soit λ un nombre complexe. Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors toute solution bornée de l'équation différentielle

$$y' = \lambda y + f \quad (3)$$

est presque périodique.

Démonstration. En résolvant l'équation homogène

$$y' - \lambda y = 0,$$

on trouve que les solutions sont sous la forme

$$y(x) = C \exp(\lambda x), \quad C \in \mathbb{C}.$$

Pour chercher une solution particulière de l'équation non homogène, nous allons appliquer la méthode de la variation de la constante.

Posons

$$y(x) = C(x) \exp(\lambda x).$$

On dérive y et on le remplace dans l'équation (3), on obtient

$$C'(x) \exp(\lambda x) + \lambda C(x) \exp(\lambda x) = \lambda C(x) \exp(\lambda x) + f(x),$$

c'est-à-dire que,

$$C'(x) = f(x) \exp(-\lambda x).$$

On intègre par rapport à x , on trouve

$$C(x) = \int_0^x \exp(-\lambda s) f(s) ds + K, \quad K \in \mathbb{C}.$$

On en déduit que la solution général de (??) est donnée par

$$y(x) = \exp(\lambda x) \left(K + \int_0^x \exp(-\lambda s) f(s) ds \right).$$

Pour étudier la bornitude de ces solutions, on va distinguer trois cas :

On pose $\lambda = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Premier cas : $a > 0$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\exp \lambda x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(ax) = +\infty$, alors pour que la solution y soit bornée au voisinage de $(+\infty)$, on doit avoir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(K + \int_0^x \exp(-\lambda s) f(s) ds \right) = 0.$$

C'est-à-dire que,

$$K = - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) f(s) ds.$$

Par hypothèse $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors d'après les propriétés des fonctions presque périodiques, f est bornée.

Notons $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, alors

$$0 \leq |\exp(-\lambda s) f(s)| \leq M \exp(-as) |\exp(-ibs)| \leq M \exp(-as).$$

C'est-à-dire que, l'intégrale $\left[- \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) f(s) ds \right]$ existe et est finie.

La solution y s'écrit alors

$$y(x) = \exp(\lambda x) \left(- \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) f(s) ds + \int_0^x \exp(-\lambda s) f(s) ds \right).$$

D'après la relation de Chasles, on obtient

$$y(x) = - \exp(\lambda x) \int_x^{+\infty} \exp(-\lambda s) f(s) ds.$$

D'où

$$y(x) = - \int_x^{+\infty} \exp(-\lambda(s-x)) f(s) ds.$$

On fait le changement de variable en posant $u = s - x$, on obtient

$$y(x) = - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda u) f(u+x) du.$$

Il est clair que y est bornée, en effet puisque f est bornée on a

$$|\exp(-\lambda u) f(u+x)| \leq M |\exp(-ibu)| \exp(-au) \leq M \exp(-au).$$

D'où

$$\begin{aligned} |y(x)| &= \left| - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda u) f(u+x) du \right| \leq M \int_0^{+\infty} \exp(-au) du \\ &\leq \int_0^{+\infty} |\exp(-\lambda u) f(u+x)| du \\ &\leq M \int_0^{+\infty} \exp(-au) du \\ &\leq \frac{M}{a}. \end{aligned}$$

Maintenant on vérifie que la solution de l'équation (3) est bien presque périodique.

Comme la fonction f est presque périodique, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_{a\varepsilon} > 0$ tel que tout intervalle de longueur $\ell_{a\varepsilon}$ contient au moins un nombre positif T satisfaisant

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq a\varepsilon, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |y(x+T) - y(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda u) [f(u+x+T) - f(u+x)] du \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \exp(-au) |f(u+x+T) - f(u+x)| du \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \int_0^{+\infty} \exp(-au) du \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \frac{1}{a} \\ &\leq a\varepsilon \frac{1}{a} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la solution y est une fonction presque périodique.

Deuxième cas : $a < 0$

On procède de la même manière, cette fois-ci en considérant le fait que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\exp(\lambda x)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(ax) = +\infty.$$

Troisième cas : $a = 0$

On a donc que $\lambda = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors la solution y est de la forme

$$y(x) = \exp(ibx) \left(K + \int_0^x \exp(-ibs) f(s) ds \right).$$

Si on suppose que y est bornée alors on aura nécessairement

$$x \mapsto \int_0^x \exp(-ibs) f(s) ds$$

est aussi bornée.

Puisque

$$s \mapsto \exp(-ibs) f(s)$$

est presque périodique en tant que produit de deux fonctions presque périodiques, on en déduit que

$$x \mapsto \int_0^x \exp(-ibs) f(s) ds$$

est une primitive d'une fonction presque périodique.
Ceci entraîne que

$$x \mapsto \int_0^x \exp(-ibs) f(s) ds$$

est presque périodique, donc y l'est aussi.
Ce qui achève la démonstration. □

0.4 Solutions presque périodiques d'un système d'équations différentielles

Commençons par rappeler un résultat d'algèbre linéaire concernant la triangularisation des matrices

Théorème 0.4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure contenant les valeurs propres de A sur sa diagonale telles que*

$$A = P^{-1}TP.$$

Théorème 0.4.2. *Si les fonctions f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sont presque périodiques, alors toute solution bornée sur $\mathbb{R}$ du système (2) est presque périodique.*

Démonstration. D'abord, montrons que le résultat est vrai pour les matrices triangulaires supérieures, pour cela on se donne une solution bornée y du système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n t_{ij} y_j + f_i(x), i \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

où $T = (t_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice telle que $t_{ij} \in \mathbb{C}$ avec $t_{ij} = 0$ si $i > j$ et les fonctions f_i sont à valeurs complexes.

On peut faire une récurrence sur l'ordre de la matrice T , le Théorème 3 assure le résultat pour une matrice d'ordre 1. Supposons que le résultat est vrai pour les matrices de taille n , et montrons le pour les matrices de taille $(n+1)$, c'est-à-dire montrons que le résultat est vrai pour le système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n+1} t_{ij} y_j + f_i(x), i \in \{1, \dots, n+1\}$$

On considère $y = (y_1, \dots, y_{n+1})^t$ une solution bornée de (4). La dernière équation est

$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = t_{n+1, n+1} y_{n+1}(x) + f_{n+1}(x).$$

Et le Théorème 3 assure que y_{n+1} est presque périodique. On applique maintenant l'hypothèse de récurrence pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, donc le résultat est vrai pour les matrices de taille $n+1$, et par conséquent il est vrai pour les matrices de taille n . ce qui achève la démonstration du théorème pour les matrices triangulaires supérieures.

Revenons maintenant au cas général, d'après le Théorème ?? il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure contenant les valeurs propres de A sur sa diagonale telles que

$$A = P^{-1}TP.$$

Soit y une solution bornée de (2), alors on a en multipliant à gauche par P que

$$\frac{dPy}{dx} = TPy + Pf$$

où $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ et $f = (f_1, \dots, f_n)^t$, on pose $z = Py$ et $g = Pf$, on aura

$$\frac{dz}{dx} = Tz + g.$$

Les composantes de g sont toutes presque périodiques en tant que combinaisons linéaires à coefficients constants de fonctions presque périodiques.

Puisque y est bornée alors $z = Py$ est bornée, et d'après le théorème précédent z est presque périodique.

Les composantes du vecteur y étant des combinaisons linéaires à coefficients constants de composantes de z , on en déduit alors que les composantes de y sont presque périodiques, et par conséquent la solution y est presque périodique. $\square$

Remarque 0.4.1. Ce théorème ne garantit pas l'existence d'une solution bornée, alors la question qui se pose est : quelles conditions sur la matrice A doit-on imposer pour avoir une solution bornée ?

Le théorème suivant qui répond à la question précédente.

Théorème 0.4.3. *Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ la fonction f_i est presque périodique et si A ne possède aucune valeur propre de partie réelle nulle (c-à-d imaginaire pure) alors le système (2) admet une unique solution bornée presque périodique.*

Démonstration. On a vu dans la démonstration du Théorème 0.4.2 que le système

$$Y' = AY + f$$

se ramène à un système

$$Z' = TZ + g.$$

Chaque équation de ce système est de la forme

$$z'_i = \lambda_i z_i + g_i.$$

Puisque, par hypothèse la matrice A ne possède aucune valeur propre de partie réelle nulle, alors deux cas peuvent se présenter. ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, ou $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$).

D'après le Théorème 0.4.2, les z_i sont déterminés de manière unique, car la constante qui résulte de la résolution de l'équation a été fixée de sorte que la solution soit bornée.

Ainsi si on imite la preuve du Théorème 0.4.2 par récurrence sur l'ordre de la matrice A , on trouve que chaque y_i est bornée.

Alors l'unique solution Y est presque périodique. $\square$

Bibliographie

- [1] M. AMERIO, G. PROUSE, *Almost Periodic Functions and Functional Equations*, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1971.
- [2] C. CORDUNEANU, *Almost Periodic Functions*, Wiley, New York, 1968.