Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes.
Master 1 : Analyse Mathématiques
Enseignant : Mme Talbi Boulahia Fatiha

Année : 2019 – 2020
Date : 14 – 04 – 2020
Module : Fonctions presque périodiques

Corrigé de la série de TD 1 : Fonctions périodiques

Exercice 1.

1. *Montrer que si f est $T-$ périodique sur $\mathbb{R}$ alors ses translatées f_τ, $\tau \in \mathbb{R}$ sont aussi $T-$périodiques et $P_f = P_{f\tau}$.*
   Rappelons que f_τ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f(x+\tau)$.
2. *Soit f une fonction T-périodique. Soit F une primitive de f*
   Montrer que F est T-périodique ssi $\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0$.
3. *Montrer que toute fonction périodique continue qui admet une limite en $+\infty$ est constante.*

Solution .1

1. *Par hypothèse f est une fonction $T-$périodique sur $\mathbb{R}$ alors*
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\tau(x+T) = f(x+T+\tau) = f(x+\tau) = f_\tau(x).$$
   Donc f_τ est $T-$périodique.
   Soit $p \in P_f$ donc $f(x+p) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors
   $$f_\tau(x+p) = f(x+p+\tau) = f(x+\tau) = f_\tau(x).$$
   Donc $p \in P_{f_\tau}$.
   Si $p \in P_{f_\tau}$ alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\tau(x+p) = f_\tau(x) \Rightarrow f(x+p+\tau) = f(x+\tau) \Rightarrow f((x+\tau)+p) = f(x+\tau).$$
   Ce qui donne $p \in P_f$.
   ***Autre manière de montrer la duxième inclusion** : si $p \in P_{f_\tau}$ alors d'après la première inclusion $p \in P_{(f_\tau)_{-\tau}=P_f}$.*
2. *Si F est une primitive de f. Comme l'intégrale d'une fonction périodique ne dépend pas de l'intervalle choisi mais seulement de sa longueur on aura, pour tout $x \in \mathbb{R}$*
   $$F(x) = F(0) + \int\limits_0^x f(t)\,dt.$$
   Donc,
   $$F(x+T) - F(x) = \int\limits_0^{T+x} f(t)\,dt - \int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+T} f(t)\,dt = \int\limits_0^T f(t)\,dt. \tag{1}$$
   En utilisant (1) on obtient que F est T-périodique si et seulement si $\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0$

3. f *est* T*-périodique alors*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+nT) = f(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On suppose que f *n'est pas constante et montrons que* f *n'admet pas de limite à* ∞.
f *n'est pas constante alors il existe* $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$ *tels que* $f(a) \neq f(b)$. *Posons*

$$x_n = a + nT \text{ et } y_n = b + nT.$$

Alors

$$f(a) = f(a+nT) \text{ et } f(b) = f(b+nT),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par l'absurde, on suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$. *Comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ *alors* $f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ *et* $f(b) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = l$ *contradiction avec* $f(a) \neq f(b)$.

Exercice 2. *Soit* a $(0 < a < \pi)$ *un paramètre réel. On lui associe la fonction* 2π*-périodique, définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 \text{ si } 0 < x < a \\ 0 \text{ si } a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Montrer que

$$c_n(f) = \frac{\sin\left(\frac{na}{2}\right)}{\pi n} e^{-\frac{ina}{2}} \qquad \text{pour } n \neq 0. \quad \text{Que vaut } c_0(f)?$$

Solution .2 *Par définition*

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-int} dt$$

Pour $n \neq 0$ *on a*

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-1}{in} e^{-int}\right]_0^a = \frac{1}{2\pi in}\left(1 - e^{-ina}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi in} e^{-\frac{ina}{2}} \left(e^{\frac{ina}{2}} - e^{-\frac{ina}{2}}\right) = \frac{1}{2\pi in} e^{-\frac{ina}{2}} \left(\cos\left(\frac{na}{2}\right) + i\sin\left(\frac{na}{2}\right) - \cos\left(\frac{na}{2}\right) + i\sin\left(\frac{na}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{na}{2}\right) e^{-\frac{ina}{2}} \end{aligned}$$

Donc

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{na}{2}\right) e^{-\frac{ina}{2}},$$

et

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a dt = \frac{a}{2\pi}$$

Exercice 3. *Soit la fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $x \in [-\pi, \pi]$ *par* $g(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ *et prolongée comme fonction* 2π*-périodique continue sur* $\mathbb{R}$.

Calculer les coefficients de Fourier de g.

Solution .3 *les coefficients de Fourier de g.*
Par définition

$$c_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left[(\pi-(-\pi)) - \frac{1}{3\pi^2}\left(\pi^3-(-\pi)^3\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi - \frac{2\pi^3}{3\pi^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{6\pi-2\pi}{3} = \frac{2}{3}.$$

et Pour $n \in \mathbb{Z}^*$ on a

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)e^{-inx}dx = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx}_{=0} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{\pi^2}e^{-inx}dx$$
$$= \underbrace{-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{\pi^2}\frac{1}{(-in)}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}\frac{1}{in}e^{-inx}dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}\frac{1}{in}e^{-inx}dx$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2x}{\pi^2}\frac{1}{n^2}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{\pi 2}\frac{1}{n^2}e^{-inx}dx^{\nearrow 0} = -\frac{1}{\pi^3 n^2}\left[\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}\right]$$
$$= -\frac{2\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} = \frac{-2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

Exercice 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et $k-$Lipshitzienne. Pour $h > 0$, on définit g_h en posant*

$$g_h(x) = f(x+h) - f(x-h).$$

1. *Vérifier que $|g_h(x)| \leq 2kh$.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier $C_n(g_h)$ en fonction de $C_n(f)$.*
3. *En utilisant l'égalité de Parseval montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |sin(nh)C_n(f)|^2 \leq k^2h^2$.*

Solution .4 1. *En utilisant le fait que f est $k-$Lipshitzienne on obtient*

$$|g_h(x)| = |f(x+h) - f(x-h)| \leq k|x+h-(x-h)| \leq 2kh.$$

2. *Par définition*

$$C_n(g_h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_h(x)\,e^{-inx}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+h) - f(x-h)\right)e^{-inx}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)e^{-i\pi nx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)e^{-inx}dx. \tag{3}$$

En faisant un changement de variable dans les deux intégrales on trouve

$$\begin{aligned}
C_n(g_h) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(y)e^{-in(y-h)}dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(y)e^{-in(y+h)}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{inh}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(y)e^{-iny}dy - \frac{1}{2\pi}e^{-inh}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(y)e^{-iny}dy.
\end{aligned}$$

Comme f est périodique alors

$$\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(y)e^{-iny}dy = \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(y)e^{-iny}dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
C_n(g_h) &= \frac{1}{2\pi}e^{inh}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy - \frac{1}{2\pi}e^{-inh}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy. \\
&= C_n(f)(e^{inh} - e^{-inh}). \\
&= C_n(f)2i\sin(nh).
\end{aligned}$$

3. *En utilisant l'égalité de Parseval montrons que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |sin(nh)C_n(f)|^2 \leq k^2h^2$.

   D'après l'égalité de Parseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(g_h)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_h(x)|^2 dx$$

   Alors

$$4\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)\sin(nh)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 4k^2h^2 dx = 4k^2h^2.$$

   Finalement, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)\sin(nh)|^2 \leq k^2h^2$.

Exercice 5. *On rappelle que le noyau de Dirichlet D_k et le noyau de Fejer F_n sont définis comme suit :*

$$D_k(x) = \sum_{m=-k}^{k} e^{imx} \quad et \quad F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x).$$

Montrer que

1. $D_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} & si \;\; x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2k+1 & si \;\; x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

2. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(y)dy = 1.$

3. $F_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

4. $F_n(x) \geq 0,\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = 1$ *et* $\forall \delta > 0, \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x)\,dx = 0$

Solution .5

1. *Une autre écriture du noyau de Dirichlet*

$$\begin{aligned}
D_k(x) = \sum_{m=-k}^{k} e^{imx} &= e^{-kix} \frac{1 - e^{ix(2k+1)}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{-kix} - e^{ix(2k+1) - ikx}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{-kix} - e^{ix(2k+1) - ikx}}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} \\
&= \frac{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-kix} - e^{ix(2k+1) - ikx})}{(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} \\
&= \frac{-e^{-(k+\frac{1}{2})i\frac{x}{2}} + e^{ix(k+\frac{1}{2})i\frac{x}{2}})}{(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} \\
&= \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \quad si \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ *alors* $D_k(x) = 2k + 1$.

2. *Montrons que* $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(y)dy = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-k}^{k} e^{imx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-k}^{k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx.
\end{aligned}$$

Si $m \neq 0$ *alors* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = 0$.

Si $m = 0$ *alors* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = 2\pi$.

Ceci donne que $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(y)dy = 1$.

3. *Montrons que si* $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ *alors*

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, *on a*

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{2k+1}{2}x$$

$$= \frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}} Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{(k+\frac{1}{2})x}\right) = \frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}} Im\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\sin\frac{x}{2}} Im\left(\frac{1-e^{ix(n+1)}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}\right) = \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}} Im\left(\frac{1-e^{ix(n+1)}}{-2i}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}} Im\left(\frac{\left(1-e^{ix(n+1)}\right)}{-2i}\frac{e^{-ix(n+1)}}{e^{-ix(n+1)}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}} Im\left(\frac{e^{-ix(n+1)\frac{x}{2}}-e^{ix(n+1)\frac{x}{2}}}{-2ie^{-ix(n+1)\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)}\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} Im\left(e^{ix(n+1)x}\right) = \frac{1}{(n+1)}\frac{\sin^2(n+1)\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Il est alors clair que $F_n(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

4. *Montrons que* $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = 1$. *On a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k} e^{imx}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k,m\neq 0}^{k}\frac{e^{im\pi}-e^{-im\pi}}{im}+2\pi\right).$$

Comme $\frac{e^{im\pi}-e^{-im\pi}}{im} = 0$ *on trouve*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n} 2\pi = 1$$

5. *Montrons que* $\forall \delta > 0, \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\delta\leq|x|\leq\pi} F_n(x)\,dx = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} F_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi}\frac{1}{(n+1)}\frac{\sin^2(n+1)\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}\mu([-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi])_{\to}0 \text{ quand } n\to+\infty$$

μ *désigne la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$.