Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes.
Master 1 : Analyse Mathématiques
Enseignant : Mme Talbi-Boulahia Fatiha

Année : 2019 – 2020
Date : 15 – 05 – 2020
Module : Fonctions presque périodiques

Corrigé série de TD 2 : Fonctions presqu périodiques de Bohr

Exercice 1. *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,*

1. $E(\varepsilon, f) \subset E(\varepsilon', f)\,,\ \forall \varepsilon < \varepsilon'$.
2. $E(\varepsilon, f)$ *est fermé dans* $\mathbb{R}$.
3. $E(f_\alpha, \varepsilon) = E(f, \varepsilon)$. *C'est-à-dire,* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est invariant par translation.*

Solution .1

1. $E(\varepsilon, f) \subset E\{\varepsilon', f\}\,,\ \forall \varepsilon < \varepsilon'$.
   Soit $T \in E(\varepsilon, f)$ *alors* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \le \varepsilon$. *Comme* $\varepsilon' > \varepsilon$, *on obtient*
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \le \varepsilon < \varepsilon'.$$
   Ce qui donne, $T \in E\{\varepsilon', f\}$.
   Par conxéquent,
   $$E(\varepsilon, f) \subset E\left\{\varepsilon', f\right\}.$$
2. $E(\varepsilon, f)$ *est fermé dans* $\mathbb{R}$.
   Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $E\{\varepsilon, f\}$ *qui converge vers* T *dans* $\mathbb{R}$. *Montrons que* $T \in E(\varepsilon, f)$.
   $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E(\varepsilon, f)$ *c'est à dire* $\forall n \in \mathbb{N}\ T_n \in \mathbb{R}$ *et*
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T_n) - f(x)| \le \varepsilon.$$
   Par passage à la limite et grâce à la continuité de f, *on obtient*
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x + \lim_{n\to\infty} T_n) - f(x) \right| \le \varepsilon,$$
   ce qui est équivalent à
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \le \varepsilon.$$
   D'ou $T \in E(\varepsilon, f)$.
3. $E(f_\alpha, \varepsilon) = E(f, \varepsilon)$. *C'est-à-dire,* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est invariant par translation.*
   Supposons que $T \in E\{\varepsilon, f_\alpha\}$ *et montrons que* $T \in E(\varepsilon, f)$.
   Soit $T \in E\{\varepsilon, f_\alpha\}$, *alors*
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_\alpha(x+T) - f_\alpha(x)| \le \varepsilon.$$

Alors
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T+\alpha)-f(x+\alpha)| \leq \varepsilon.$$
En Posant $z = x+\alpha$, on obtient
$$f(z+T)-f(z) = f(x+\alpha+T)-f(x+\alpha) = f_\alpha(x+T)-f_\alpha(x).$$
On a
$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f(z+T)-f(z)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_\alpha(x+T)-f_\alpha(x)| \leq \varepsilon.$$
Donc $T \in E(\varepsilon, f)$. Par conséquent
$$E\{\varepsilon, f_\alpha\} \subset E\{\varepsilon, f\}. \tag{1}$$
Maintenant supposons que $T \in E(\varepsilon, f)$ et montrons que $T \in E\{\varepsilon, f_\alpha\}$.
$T \in E(\varepsilon, f)$, alors
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T)-f(x)| \leq \varepsilon.$$
On a
$$f_\alpha(x+T)-f_\alpha(x) = f(x+\alpha+T)-f(x+\alpha),$$
on pose, $y = x+\alpha$, on obtient
$$f_\alpha(x+T)-f_\alpha(x) = f(y+T)-f(y)$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_\alpha(x+T)-f_\alpha(x)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y+T)-f(y)| \leq \varepsilon.$$
c'est-à-dire$T \in E(\varepsilon, f_\alpha)$.
Donc,
$$E(\varepsilon, f) \subset E\{\varepsilon, f_\alpha\}. \tag{2}$$
Donc (1) et (2) impliquent que $\forall\varepsilon > 0$,
$$E(\varepsilon, f_\alpha) = E(\varepsilon, f).$$

Exercice 2. *Montrer que la fonction définie par*
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin x + \sin\sqrt{2}x \end{array}$$

Solution .2 *f n'est pas périodique car la fonction $x \longmapsto sinx$ est 2π périodique et la fonction $x \longmapsto sinx$ est $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ périodique et comme le rapport des deux périodes est irrationnel donc la fonction n'est pas périodique.*

Montrons que f est presque périodique.

Soit $T \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $|\cos x| \leq 1$ et $|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on trouve.
$$\begin{aligned} |f(x+T)-f(x)| &= |\sin(x+T) + \sin\left(\sqrt{2}(x+T)\right) - \sin x - \sin\sqrt{2}x| \\ &= |\sin x\cos T + \sin T\cos x + \sin\sqrt{2}x\cos\sqrt{2}T + \sin\sqrt{2}T\cos\sqrt{2}x - \sin x \\ &\quad - \sin\sqrt{2}x| \\ &= |\sin\sqrt{2}x\left(\cos\sqrt{2}T - 1\right) + \sin x\left(\cos T - 1\right) + \sin T\cos x \\ &\quad + \sin\sqrt{2}T\cos\sqrt{2}x| \\ &\leq |\cos(\sqrt{2}T)-1| + |\cos(T)-1| + |\sin T| + |\sin\sqrt{2}T|. \end{aligned}$$

On prend $T = 2n\pi,$ *alors*

$$\sin T = \sin(2n\pi) = 0 \ \textit{et} \ \cos(T) = \cos(2n\pi) = 1.$$

D'ou

$$|f(x+T) - f(x)| \leq \left|1 - \cos\sqrt{2}T\right| + \left|\sin\sqrt{2}T\right| \ = \left|1 - \cos\sqrt{2}(2n\pi)\right| + \left|\sin\sqrt{2}(2n\pi)\right|$$

Soit $\varepsilon > 0,$ *d'après le théorème de* ***Gottschalk****, il existe deux entiers* m, n *tels que*

$$\left|m - \sqrt{2}n\right| < \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

Posons

$$\sqrt{2}n - m = a, avec\, |a| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi},$$

ce qui donne

$$\sqrt{2}T = \sqrt{2}(2n\pi) = (m+a)2\pi.$$

On a

$$\begin{aligned}\cos\sqrt{2}T &= \cos(2\pi m + 2\pi a)\\ &= \cos(2\pi m)\cos(2\pi a) - \sin(2\pi m)\sin(2\pi a)\\ &= \cos 2a\pi,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{2}T &= \sin(2\pi m + 2\pi a).\\ &= \sin(2\pi m)\cos(2\pi a) + \sin(2\pi a)\cos(2\pi m).\\ &= \sin 2\pi a.\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à dire que

$$|f(x+T) - f(x)| \leq |1 - \cos 2\pi a| + |\sin 2\pi a|.$$

Comme

$$|\sin\theta| \leq |\theta|, \ \textit{et} \ |1 - \cos\theta| \leq |\theta|, \quad \forall\theta.$$

Alors,

$$|f(x+T) - f(x)| \leq 2|a|\pi + 2|a|\pi = 4\pi|a| \leq 4\pi\frac{\varepsilon}{4\pi} \leq \varepsilon.$$

Par consequent,

$$\{2n\pi, \ n \in \mathbb{Z} \subset E(\varepsilon, f).$$

Puisque $\{2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$ *est relativement dense alors* $E(\varepsilon, f)$ *est aussi relativement dense. Ainsi on conclut que* f *est presque périodique.*

Exercice 3. *Soient* f *et* g *deux fonctions presque périodiques et* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Montrer que*

1. $f + g \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ *et* $\alpha f \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{C})$
2. *Si* $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = m > 0,$ *alors* $\left(\frac{1}{f}\right) \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{C}).$
3. $f.g \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{C}).$
4. *Si* h *une fonction uniformément continue alors* $h \circ f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$

5. *si* $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ *alors* $(f * \varphi) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Solution .3

Montrons que

1. *si* f *est une fonction* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *alors* αf *est* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *pour tout réel* α. *C'est à dire montrons que* $E(\varepsilon, \alpha f)$ *est relativement dense. On a*

$$\begin{aligned} E(\varepsilon, \alpha f) &= \left\{ T \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \sup_{x \in \mathbb{R}} |\alpha f(x+T) - \alpha f(x)| \leq \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ T \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \sup_{x \in \mathbb{R}} |\alpha| \, |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ T \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \right\} \\ &= E\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}, f\right). \end{aligned}$$

Comme $E\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}, f\right)$ *est relativement dense, on a le résultat recherché.*

2. *La somme de deux fonctions de* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est une fonction de* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $f_1, f_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *alors on vérifie facilement que*

$$E(\varepsilon, f_1 + f_2) \supset E\left(\frac{\varepsilon}{2}, f_1\right).E\left(\frac{\varepsilon}{2}, f_2\right).$$

Par conséquent, l'ensemble $E(\varepsilon, f_1 + f_2)$ *est relativement dense. Ce qui implique que* $f_1 + f_2$ *est* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On peut aussi utiliser l'approximation par des polynômes trigonométriques pour montrer cette propriétés.

3. *Le produit de deux fonctions* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est une fonction* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Avant de montrer la stabilité par le produit on peut montrer facilement que si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *alors* $f^2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *(Montrer que* $E\left(\frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}, f\right) \subset E\left(\varepsilon, f^2\right)$

La fonction $f_1.f_2$ *peut être donnée par*

$$f_1.f_2 = \frac{1}{4}(f_1 + f_2)^2 - \frac{1}{4}(f_1 - f_2)^2.$$

Ce qui donne le résultat.

4) si f *une fonction presque périodique et* $\inf_{\mathbb{R}} |f(x)| = M > 0$, *alors,* $\frac{1}{f}$ *est presque périodique.*

Soit $T \in E(\varepsilon, f)$ *alors* $|f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}$

On aura donc

$$\left| \frac{1}{f(x+T)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \left| \frac{f(x+T) - f(x)}{f(x+T).f(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{M^2}.$$

Donc $T \in E\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{f}\right\}$, *c'est à dire* $E\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{f}\right\}$ *contient* $E\{\varepsilon, f\}$, *donc cet ensemble est relativement dense . D'ou le résultat.*

4. *si f_1 et f_2 sont deux fonctions de $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ avec $\inf_{\mathbb{R}} |f_2(x)| > 0$ alors $\frac{f_1}{f_2}$ est une fonction $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

   f_1, f_2 sont deux fonctions $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$. alors $\frac{1}{f_2}$ est aussi $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Comme $\frac{f_1}{f_2} = f_1.\frac{1}{f_2}$, alors elle est $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

5. *soit $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ donc f est continue et comme $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $(f * g)$ est continue.*

   On a pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$|(f * g)(y) \leq \|f\|_\infty \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

   On suppose que $g \neq 0$ car si $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ alors $f * g = 0$ et donc $(f * g) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

   On a $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$ contient un nombre T vérifiant
$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}}.$$

   Posons $x = y - t \in \mathbb{R}$
$$|f(y - t + \tau) - f(y - t)| \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}}.$$

   On obtient,
$$\begin{aligned}(f * g)(x+\tau) - (f * g)(y) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) f(y + \tau - x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(y - x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(f(y + \tau - x) - f(y - x)\right) g(x) dx.\end{aligned}$$

   Alors,
$$\begin{aligned}|(f * g)(x+\tau) - (f * g)(y)| &= |f(y + \tau - x) - f(y - x)| \, \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Exercice 4. *Soit f une fonction $\tau-$périodique et continue, donc f est presque périodique. En utilisant la définition de la valeur moyenne d'une fonction presque périodique et le fait que tout réel T peut s'écrire $T = n\tau + \alpha_n$ avec $0 \leq \alpha_n \leq \tau$, retrouver*

1. *la formule de la valeur moyenne de f,*

2. *les coefficients de Fourier de f.*

Solution .4 *On pose donc $T = n\tau + \alpha_n$ avec $0 \leq \alpha_n \leq \tau$, on voit que $T \to +\infty$ si et seulement si $n \to +\infty$.*

1. *La valeur moyenne d'une fonction presque périodique est par définition*

$$M\left(f\right)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\left(x\right)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\int_0^{n\tau+\alpha_n} f\left(x\right)dx$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\left[\int_0^{\tau} f\left(x\right)dx+\int_{\tau}^{2\tau} f\left(x\right)dx+...+\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} f\left(x\right)dx+\int_{n\tau}^{n\tau+\alpha_n} f\left(x\right)dx\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\left[n\int_0^{\tau} f\left(x\right)dx+\int_{n\tau}^{n\tau+\alpha_n} f\left(x\right)dx\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\tau+\alpha_n}\int_0^{\tau} f\left(x\right)dx+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\int_{n\tau}^{n\tau+\alpha_n} f\left(x\right)dx=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f\left(x\right)dx$$

et on retrouve la notion usuelle de valeur moyenne.

2. *les coefficients de Fourier de* f.

$$a\left(\lambda\right)=M\left\{f\left(x\right)e^{-i\lambda x}\right\}$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left(x\right)e^{-i\lambda x}dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\int_0^{n\tau+\alpha_n} f\left(x\right)e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\left[\int_0^{\tau} f\left(x\right)e^{-i\lambda x}dx...+\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} f\left(x\right)e^{-i\lambda x}dx+\int_{n\tau}^{n\tau+\alpha_n} f\left(x\right)e^{-i\lambda x}dx\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} f\left(x\right)e^{-i\lambda x}dx+\int_{n\tau}^{n\tau+\alpha_n} f\left(x\right)e^{-i\lambda x}dx\right].$$

Comme f *est bornée alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\int\limits_{n\tau}^{n\tau+\alpha_n} f\left(x\right)e^{-i\lambda x}dx=0.$

Donc $a\left(\lambda\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} f\left(x\right)e^{-i\lambda x}dx.$

On pose $y=x-k\tau$ *alors,*

$$a\left(\lambda\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\tau} f\left(y+k\tau\right)e^{-i(\lambda y+k\tau)}dy.$$

f *est périodique alors*

$$a\left(\lambda\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\tau} f\left(y\right)e^{-i(\lambda y+k\tau)}dy$$

$$=\int_0^{\tau} f\left(y\right)e^{-i\lambda y}dy\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau+\alpha_n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-i\lambda k\tau}.$$

On doit distinguer deux cas :

Premier cas : si $e^{-i\lambda\tau} = 1$ *c'est à dire* $\lambda \in \frac{2\pi}{\tau}\mathbb{Z}$. *Alors* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{-i\lambda k\tau} = n$. *Ce qui donne*

$$a(\lambda) = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(y)\, e^{-i\lambda y} dy.$$

On retrouve les coefficients de Fourier usuels.

Deuxième cas : si $e^{-i\lambda\tau} \neq 1$ *c'est à dire* $\lambda \notin \frac{2\pi}{\tau}\mathbb{Z}$. *Alors* $|\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{-i\lambda k\tau}| \leq \frac{2}{|1-e^{-i\lambda\tau}|}$. *Donc* $a(\lambda) = 0$.

On retrouve le résultat concernant les coefficients de Fourier dans le cadre des fonctions périodiques.

Exercice 5. *Soit* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *une fonction presque périodique dont la dérivée est presque périodique. Calculer les coefficients de Fourier de* f'

Solution .5 *Si on note* $a(\lambda)$ *le coefficient de Fourier de* f' *alors par définition*

$$a(\lambda) = M\left\{f'(x)\, e^{-i\lambda x}\right\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T f'(x)\, e^{-i\lambda x} dx$$

En faisant une intégration par partie on aura

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{T}\left[f(x)\, e^{-i\lambda x}\right]_0^T + \frac{i\lambda}{T}\int\limits_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x} dx\right] \\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{i\lambda}{T}\int\limits_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x} dx = i\lambda M\left\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\right\} \end{aligned}$$

On obtient

$$M\left\{f'(x)\, e^{-i\lambda x}\right\} = i\lambda M\left\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\right\}$$