

Série de TD 1 : Fonctions périodiques

Exercice 1.

1. Montrer que si f est T -périodique sur $\mathbb{R}$ alors ses translatées f_τ , $\tau \in \mathbb{R}$ sont aussi T -périodiques et $P_f = P_{f_\tau}$.

Rappelons que f_τ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\tau(x) = f(x + \tau)$.

2. Soit f une fonction T -périodique. Soit F une primitive de f

Montrer que F est T -périodique ssi $\int_0^T f(t) dt = 0$.

3. Montrer que toute fonction périodique continue qui admet une limite en $+\infty$ est constante.

Exercice 2. Soit a ($0 < a < \pi$) un paramètre réel. On lui associe la fonction 2π -périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Montrer que

$$c_n(f) = \frac{\sin\left(\frac{na}{2}\right)}{\pi n} e^{-\frac{ina}{2}} \quad \text{pour } n \neq 0. \quad \text{Que vaut } c_0(f)?$$

Exercice 3. Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $g(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ et prolongée comme fonction 2π -périodique continue sur $\mathbb{R}$.

Calculer les coefficients de Fourier de g .

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et k -Lipshitzienne. Pour $h > 0$, on définit g_h en posant

$$g_h(x) = f(x + h) - f(x - h).$$

1. Vérifier que $|g_h(x)| \leq 2kh$.
2. Calculer les coefficients de Fourier $C_n(g_h)$ en fonction de $C_n(f)$.
3. En utilisant l'égalité de Parseval montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(nh)C_n(f)|^2 \leq k^2 h^2$.

Exercice 5. On rappelle que le noyau de Dirichlet D_k et le noyau de Fejer F_n sont définis comme suit :

$$D_k(x) = \sum_{m=-k}^k e^{imx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x).$$

Montrer que

$$1. D_k(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{2k+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2k+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = 1.$$

$$3. F_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2[(n+1)\frac{x}{2}]}{\sin^2(\frac{x}{2})} \quad \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$4. F_n(x) \geq 0, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 1 \text{ et } \forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) dx = 0$$