

Série de TD 2 : Fonctions presque périodiques de Bohr

Exercice 1. Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

1. $E\{\varepsilon, f\} \subset E\{\varepsilon', f\}$, $\forall \varepsilon < \varepsilon'$.
2. $E\{\varepsilon, f\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
3. $E(f_\alpha, \varepsilon) = E(f, \varepsilon)$. C'est-à-dire, $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est invariant par translation.

Exercice 2. Montrer que la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x + \sin \sqrt{2}x \end{aligned}$$

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions presque périodiques et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que

1. $f + g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\lambda f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
2. Si $\inf_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = m > 0$, alors $\left(\frac{1}{f}\right) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
3. $f \cdot g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
4. Si h une fonction uniformément continue alors $h \circ f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
5. si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ alors $(f * \varphi) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Exercice 4. Soit f une fonction τ -périodique et continue, donc f est presque périodique. En utilisant la définition de la valeur moyenne d'une fonction presque périodique et le fait que tout réel T peut s'écrire $T = n\tau + \alpha_n$ avec $0 \leq \alpha_n \leq \tau$, retrouver

1. la formule de la valeur moyenne de f ,
2. les coefficients de Fourier de f .

Exercice 5. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ une fonction presque périodique dont la dérivée est presque périodique. Calculer les coefficients de Fourier de f'