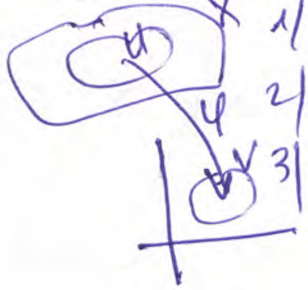
Chapitre I : Variétés différentiables

I/ Définitions :

Soit X un esp topologique

1/ Carte :

Déf : - On appelle carte de X au voisinage du pt $x \in X$, le triplet (U, φ, V) vérifiant :



1/ U ouvert de X contenant x

2/ V ouvert de $\mathbb{R}^n$

3/ $\varphi : U \longrightarrow V$ homéomorphisme (bijectif et bicont)

si φ est un difféomorphisme de classe C^r $(r = 1, \dots, +\infty)$, on dit alors que la carte (U, φ, V) est de classe C^r.

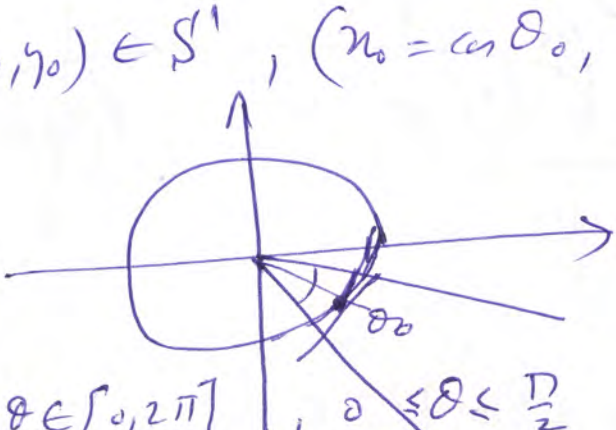
Déf : On dit que X est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ssi en tout pt $x \in X$, il existe une carte (U, φ, V) (où V ouvert de $\mathbb{R}^n$).

Exple : $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$ cercle de $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie de $\mathbb{R}^2$.

S^1 est homéomorphe à $\mathbb{R}$. En effet,

$$S^1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases},\ \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

Soit $(x_0, y_0) \in S^1$, $(x_0 = \cos\theta_0,\ y_0 = \sin\theta_0)$



Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{cases} x = \cos(\theta_0 + \alpha) \\ y = \sin(\theta_0 + \alpha) \end{cases} ; -\theta < \alpha < \theta \right\}$$

alors U est ouvert de S^1 (2)

et $\varphi : U \longrightarrow V =]\theta_0 - \theta, \theta_0 + \theta[$

$(x,y) = (\cos\beta, \sin\beta) \longrightarrow \beta = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

φ est bijective (par déf de U)

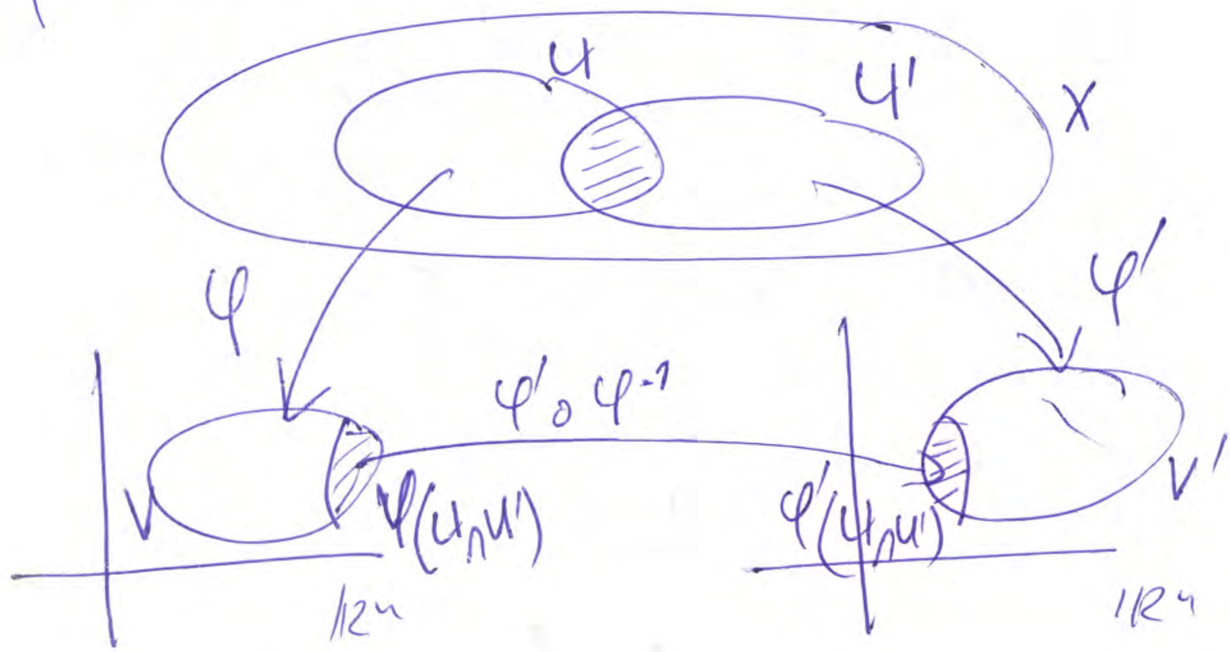
et bicontinue cqfd.

<u>Exo</u> : montrer que S^1 ne peut pas être homéomorphe à $\mathbb{R}$ ou un ouvert de $\mathbb{R}$.

<u>indic</u> par l'absurde et Rq : S^1 connexe, compacte.

2/ Compatibilité des Cartes

Déf : On dit que deux cartes de X, (U,φ,V) et (U',φ',V'), de classe C^k sont compatibles, ssi :



1/ $U \cap U' \neq \emptyset$

2/ les applications de $\mathbb{R}^n$ ds $\mathbb{R}^n$:

$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \longrightarrow \varphi'(U \cap U')$
et $\varphi \circ (\varphi')^{-1} : \varphi'(U \cap U') \longrightarrow \varphi(U \cap U')$
sont des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ et de classe $\mathcal{C}^k$.

3/ Atlas :

Déf : On appelle atlas de dimension n de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$) sur X une famille de carte $(U_i, \varphi_i, V_i)_{i \in I}$ vérifiant :

1/ $\{U_i\}$ recouvrement ouvert de X
2/ $\forall i, j$, (U_i, φ_i, V_i) et (U_j, φ_j, V_j) sont compatibles

et on note $\mathcal{A} = \{U_i, \varphi_i, V_i\}_{i \in I}$

Remarque
On peut définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des Atlas sur X de dim n et de classe $\mathcal{C}^k$, par :

$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}' \iff \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est aussi un atlas de X de dim n et de classe $\mathcal{C}^k$.

prop :
$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}' \iff$ $\forall (U, \varphi, V)$ carte de $\cancel{X}$, $\in \mathcal{A}$
et $\forall (U', \varphi', V')$ carte de $X \in \mathcal{A}'$
alors (U, φ, V) et (U', φ', V') sont compatibles.

preuves
$\Rightarrow$) par déf d'Atlas
$\Leftarrow$) par déf d'Atlas

4/ Variété différentiable :

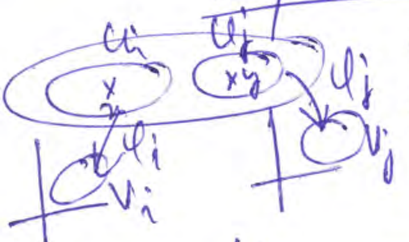
Déf: On appelle structure différentiable de dim n de classe C^k sur X, une classe d'équivalence d'Atlas de dim n de classe C^k sur X.

Déf: Une variété différentiable de dim n de classe C^k sur X est un esp topologique X muni d'une structure différentiable de ~~classe~~ dim n de classe C^k sur X.

Exple: 1/ $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dim n et de classe C^∞.
il suffit de prendre $\mathcal{A} = \{U_i, Id/U_i, U_i\}_{i \in I}$ où $\{U_i\}$ est n'importe quelle recouvrement de $\mathbb{R}^n$.

Remarque: Nous ne parlerons dans la suite que des variétés vérifiant la notion de séparabilité et de dénombrabilité:

séparabilité: 2 pts distincts de X sont ~~dans~~ bien dans une même carte (U, φ, V) ou bien $\exists$ deux carte (U_i, φ_i, V_i) et (U_j, φ_j, V_j) tq $x \in U_i$ et $y \in U_j$ et $U_i \cap U_j = \phi$.



dénombrabilité: il existe un atlas de X ayant au maximum un nombre dénombrable de carte.

II - Exemples de Variétés différentiables

1/ Sphère

$$S^n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$$

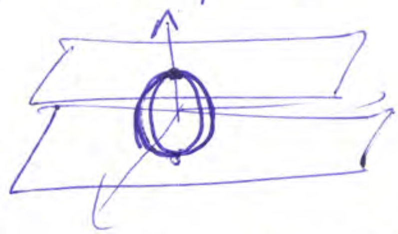
muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^{n+1}$.

a - projection stéréographique

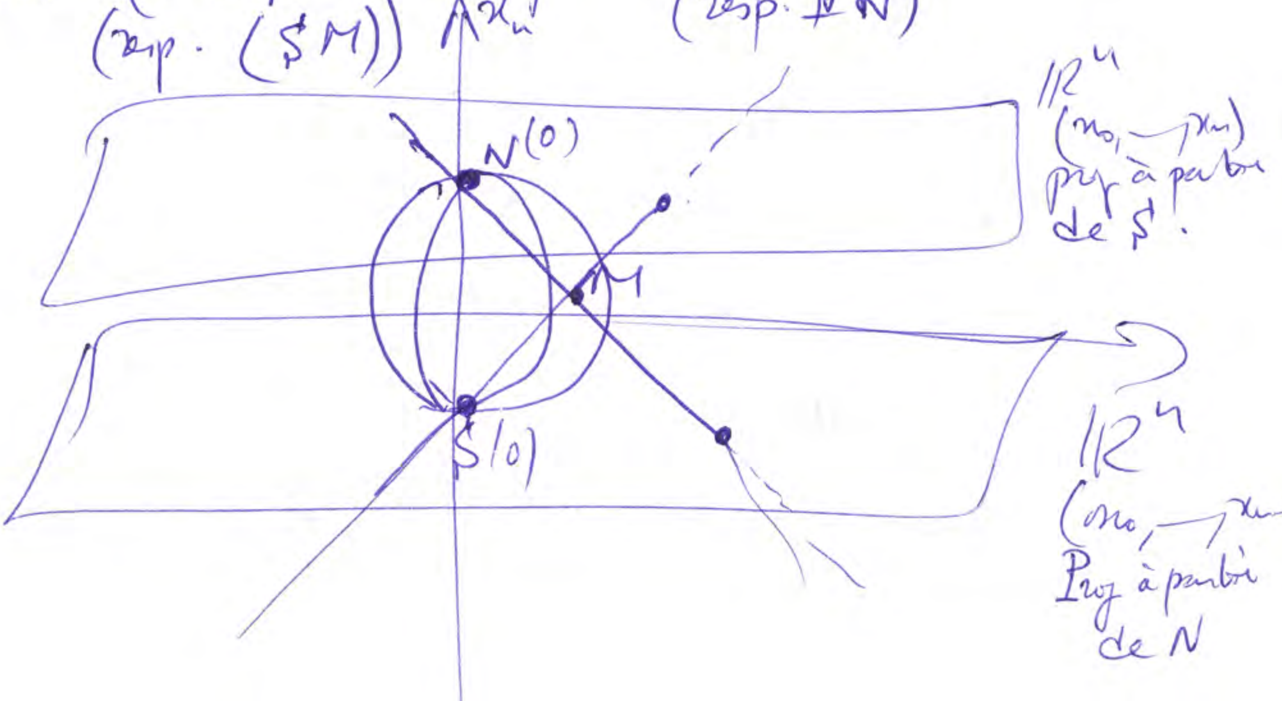
Soit $N = (0, 0, \dots, 1)$ pôle nord de S^n
$S = (0, 0, \dots, -1)$ pôle sud de S^n

On peut construire deux projections particulières à partir des pts N et S.
On note $\mathbb{P}_N$ le plan tangent à S^n au pt N
et $\mathbb{P}_S$ le plan tangent à S^n au pt S

~~dont les équations~~ ~~Soit~~ $\left\{ \begin{array}{l} \cancel{\mathbb{P}_N : x_n = 1} \\ \cancel{\mathbb{P}_S : x_n = 0} \end{array} \right.$



1° la projection stéréographique d'un pt M de S^n à partir du pôle nord N (resp. pôle sud S) est l'intersection de la droite (NM) (resp. (SM)) avec le plan $\mathbb{P}_S$ (resp. $\mathbb{P}_N$)



a) Soit $U_1 = S^n - \{N\}$, $U_2 = S^n - \{S\}$

$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \; (= S^n - \{N, S\})$

et $U_1 \cup U_2 = S^n$

b) *) soit $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$M = (x_0, \ldots, x_n) \longrightarrow \varphi_1(M)$ projection stéréographique à partir du pôle nord N.

~~...~~ $\varphi_1(M)$ pt de $(NM) \cap \underset{(\shortparallel \, \mathbb{R}^n)}{(P_S)}$

~~équation de (NM)~~.

$(NM) = \{ (0, 0, \ldots, 0, 1) + \lambda [(x_0, x_1, \ldots, x_n) - (0, \ldots, 0, 1)] \}$

$= \{ (\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n-1}, 1 + \lambda(x_n - 1)) \}$

$\varphi_1(M) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow 1 + \lambda(x_n - 1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{1 - x_n}}$ $1 - x_n \neq 0$ car $M \neq N$

$\Rightarrow (y_0, \ldots, y_{n-1}) = (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_{n-1})$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_1(x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n} (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}$

$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \frac{1}{1 - x_n} (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$

il est clair que φ_1 est C^∞

**) Construisons sa fct réciproque :

Soit $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$

associons à ce pt l'intersection de la droite $(N\omega)$ avec la sphère S^n (on note ce pt M)

la droite $(N\omega) = \left\{ (0,0,\dots,0,1) + \lambda\left[(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n-1},0) - (0,\dots,0,1)\right] \right\}$

$= \left\{ (\lambda\omega_0, \lambda\omega_1, \dots, \lambda\omega_{n-1}, 1-\lambda) \right\}$

$M \in (N\omega)$ et de plus $M \in S^n$

$$M \in S^n \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda\omega_i)^2 + (1-\lambda)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda^2\left(\sum_{i=0}^{n-1}(\omega_i^2) + 1\right) - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{2}{1+\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^2} \\ \lambda = 0 \text{ impossible car } M \neq N. \end{cases}$$

D'où. $\psi_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow U^1$

$$\omega = (\omega_0,\dots,\omega_{n-1}) \longmapsto \left(\frac{2}{1+\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^2}(\omega_0,\dots,\omega_{n-1}), \frac{\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^2 - 1}{\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^2 + 1} \right)$$

Rq: ψ_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- il est facile de vérifier que $\varphi_1 \circ \psi_1 = Id_{U_1}$
$\psi_1 \circ \varphi_1 = Id_{\mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow (U_1, \varphi_1, \mathbb{R}^n)$ carte de classe $\mathcal{C}^\infty$

c/ de même on construit la 2ème carte $(U_2, \varphi_2, \mathbb{R}^n)$

$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x_0,\dots,x_n) \longmapsto \frac{1}{x_n+1}(x_0,\dots,x_{n-1})$$

(Exo : calculer φ_2^{-1} et vérifier que $(U_2, \varphi_2, \mathbb{R}^n)$ est une carte de classe $\mathcal{C}^\infty$)

Donc on a un Atlas de 2 cartes

$(U_i, \varphi_i, \mathbb{R}^n_2)_{i=1,2}$

Exos vérifier la compatibilité des 2 cartes.

Rép : $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \psi_1 : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$

$\mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$

$\omega = (\omega_0, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}) \longrightarrow \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\omega)$

$$Y = \varphi_1^{-1}(\omega) = \psi_1(\omega) = \left(\frac{2}{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^2 + 1} \omega_0, \ldots, \frac{2}{\sum \omega_i^2 + 1} \omega_{n-1}, \frac{\sum \omega_i^2 - 1}{\sum \omega_i^2 + 1} \right)$$

$$\varphi_2(Y) = \frac{1}{+\frac{\sum \omega_i^2 - 1}{\sum \omega_i^2 + 1} + 1} \left(\frac{2}{\sum \omega_i^2 + 1} \omega_0, \ldots, \frac{2}{\sum \omega_i^2 + 1} \omega_{n-1} \right)$$

$$= \frac{\sum \omega_i^2 + 1}{2 \sum \omega_i^2} \frac{2}{\sum \omega_i^2 + 1} (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1})$$

$$\boxed{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\omega) = \frac{1}{\sum \omega_i^2} (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1})}$$

qui est une fct difféomorphe de classe C^∞.

2/ Espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Déf. On considère dans $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\} = \mathbb{R}^{n+1}_*$ une relation binaire définit par $x \mathcal{R} y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda y\ (y = \lambda x)$

cette relation est une rel d'équivalence. On note par $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'espace quotient $\mathbb{R}^{n+1}_* / \mathcal{R}$. (droites passant par l'origine)

cet espace peut être muni d'une topologie appelé topologie quotient défini par : $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

ssi
$$\begin{cases} \Pi : \mathbb{R}^{n+1}_* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^n(\mathbb{R})} \text{ continue} \\ \quad x \longmapsto \overline{x} \\ \Pi^{-1}(\mathcal{O}) \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n+1}_* . \end{cases}$$

(Π est une application surjective)

Variété $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Construisons un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, V_i)\}$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

On considère $W_j = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / x_j \neq 0\}$ $\quad x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

W_j ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}_*$ / $\bigcup_{j=0}^{n} W_j = \mathbb{R}^{n+1}_*$

et soit $U_j = \Pi(W_j)$

étape 1 Montrons que les (U_j) constituent un recouvrement ouvert de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

i/ pour montrer que U_j est ouvert de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\Pi^{-1}(U_j)$ est ouvert.

montrons que $W_j = \Pi^{-1}(U_j)$

⊆ Soit $x \in W_j \Rightarrow x_j \neq 0$ montrons qu'$\exists y \in U_j = \Pi(W_j)$

telque $y = \Pi(x)$

i.e montrons que $\exists z \in W_j\ (z_j \neq 0)$ $\Pi(z) = \Pi(x)$

par déf $z = x$.

$\supseteq$) ~~Soit~~ $y \in \pi^{-1}(U_j)$, montrons que ~~xxx~~ $y \in W_j$ (10)

(i.e. $y_j \neq 0$)

$$y \in \pi^{-1}(U_j) \Rightarrow \exists \bar{x} \in U_j \text{ tq } \pi(y) = \bar{x}$$
$$\Rightarrow \quad y \mathcal{R} x \quad , \bar{x} \in U_j = \pi(W_j)$$
$$\Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \ x = \lambda y$$

$x_j \neq 0$ car $\bar{x} \in U_j$

$$\Rightarrow \quad y_j \neq 0 \quad \text{cqfd.}$$

ii) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=0}^{n} U_j$.

Soit $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\exists y \in \mathbb{R}^{n+1}_*$ $\pi(y) = x$

$y \in \mathbb{R}^{n+1}_* \Rightarrow \exists j,\ y \in W_j$ $\left(\bigcup W_j = \mathbb{R}^{n+1}_*\right)$

$\Rightarrow \pi(y) \in U_j$.

D'où $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} U_j$

(l'inclusion inverse est évidente).

étape 2 construction des applications φ_j.

$$\varphi_j : \begin{array}{ccc} W_j & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \bar{x} = \pi(x) & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \widehat{\left(\frac{x_j}{x_j}\right)}, \frac{x_n}{x_j}\right) \end{array}$$

$x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$
$(x_j \neq 0)$

enlevé

$\wedge$: signifie que le terme apparaissant sous ce symbole ne s'écrit pas.

i/ [illegible] φ_j si bien déf, continue

ii/ φ_j bij, bicont $\mathcal{C}^\infty$.

i/ Soit $\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \; x = \lambda y$

$$\begin{cases} x_j \neq 0 \\ y_j \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall i, \quad x_i = \lambda y_i$ et $\dfrac{x_i}{x_j} = \dfrac{\lambda y_i}{\lambda y_j} = \dfrac{y_i}{y_j}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_j}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right) = \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_j}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_j(\bar{x}) = \varphi_j(\bar{y}).$$

continuité de φ_j:

On considère l'appl $\mu_j : W_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$x = (x_0, \dots, x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \widehat{\frac{x_j}{x_j}}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right)$$

est continue ($\mathcal{C}^\infty$)

$$\begin{tikzcd} W_j \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \\ U_j \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

$\mu_j = \varphi_j \circ \pi$ ~~φ_j~~ $=$

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$
on montre que $\varphi_j^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
il suffit de montrer que $\pi^{-1}\left(\varphi_j^{-1}(\Omega)\right)$ est ouvert (déf de topologie quotient)

or $\pi^{-1}\left(\varphi_j^{-1}(\Omega)\right) = \mu_j^{-1}(\Omega)$ qui est ouvert car μ_j continue cqfd.

iii/ Construction de l'appl réciproque de φ_j.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi_j"] \arrow[dr, "\chi_j"'] & U_j \\ & W_j \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

$\psi_j = \pi \circ \chi_j$

$(x_0, \dots, x_{n-1}) \longmapsto (x_0, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$

Rq: $\left.\begin{array}{l}\pi \text{ cont} \\ x_j \text{ cont}\end{array}\right)$ donc φ_j cont

$$\varphi_j\left(\psi_j(x_0, \dots, x_{n-1})\right) = \varphi_j\left(\pi(x_0, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_{n-1})\right)$$
$$= (x_0, \dots, x_{n-1})$$

$$\psi_j\left(\varphi_j\left(\pi(x_0, \dots, x_n)\right)\right) = \psi_j\left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \widehat{\frac{x_j}{x_j}}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right)$$
$$= \pi\left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, 1, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right)$$
$$= \pi\left(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n\right)$$

cqfd.

Donc $\psi_j = \varphi_j^{-1}$

Rq: les 2 fcts sont ~~$\mathcal{C}^\infty$~~ continues

étape 3: montrons la compatibilité de 2 cartes qcq

~~de et at~~

si $U_i \cap U_j \neq \phi$

vérifions que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

soit $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \varphi_j\left(\psi_i(x_0, \dots, x_{n-1})\right)$$
$$= \varphi_j\left(\pi(x_0, \dots, x_{j-1}, 1, x_j, \dots, x_{n-1})\right)$$
$$= \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{1}{x_i}, \dots, \widehat{\left(\frac{x_i}{x_i}\right)}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_i}\right)$$

fct $\mathcal{C}^\infty$.