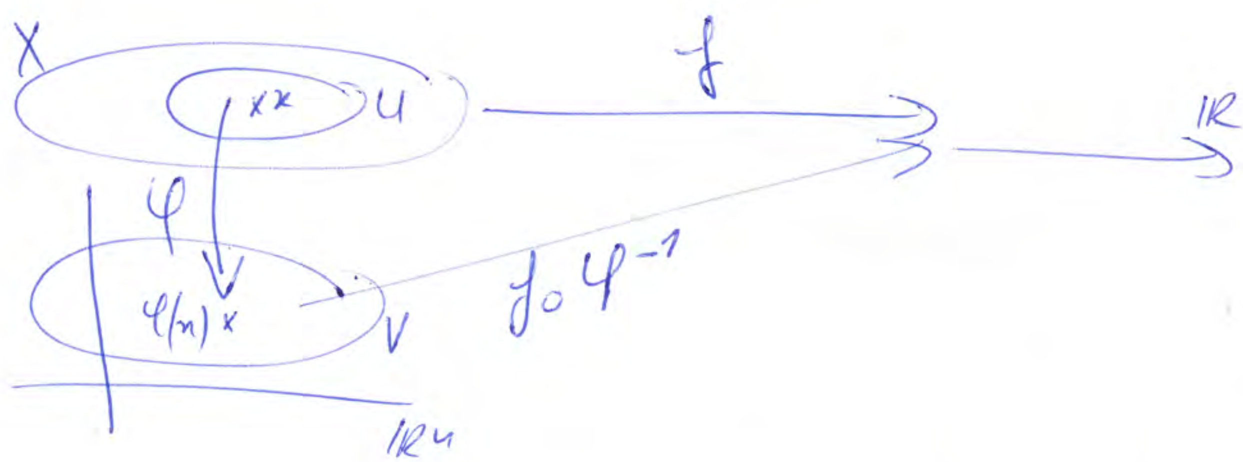
III - Espaces tangents

1. Application $\mathcal{C}^k$ sur une variété

Déf:
Soit une variété de dim n, de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$)
On dit qu'une fct $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage d'un pt $x \in X$ ssi $\exists$ une carte (U, φ, V) de X telque

1/ $x \in U$

2/ f est déf sur U et $f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de $\varphi(x)$.



Remarque:
Cette définition est indépendante du choix de la carte au voisinage de x. En effet, si (U', φ', V') est une autre carte au voisinage de x, alors ~~qui~~ elle vérifie la déf.

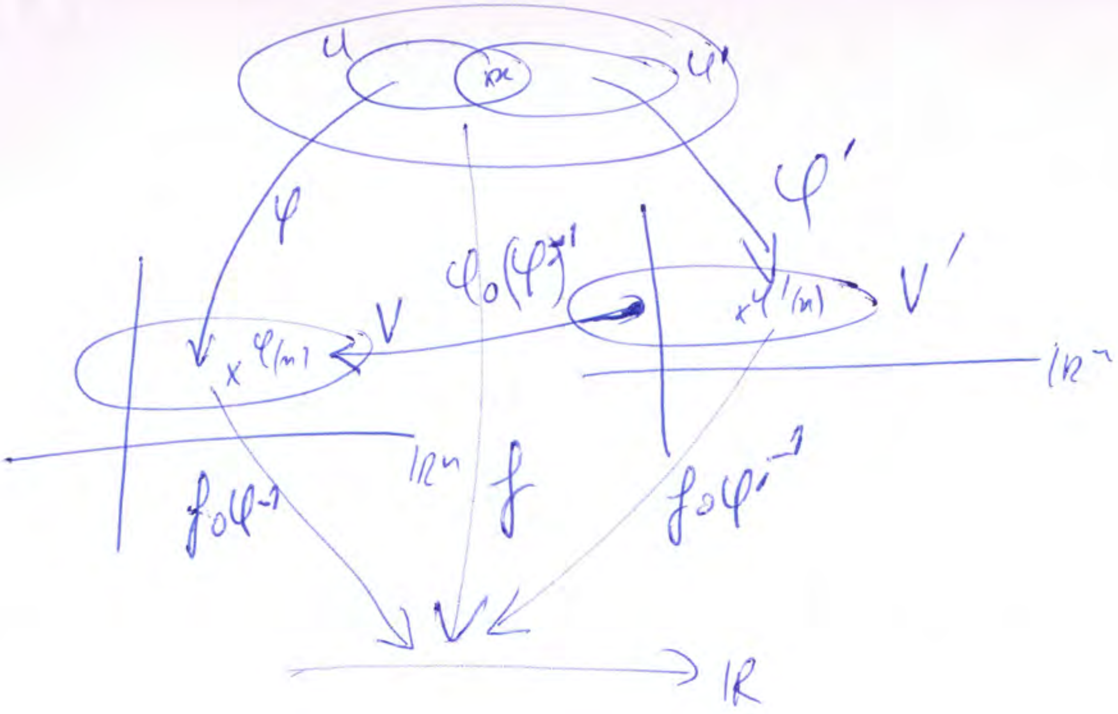
preuve: $f \circ \varphi'^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1})$

Or: $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ est $\mathcal{C}^k$ au voisinage de $\varphi'(x)$ $(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$

$f \circ \varphi^{-1}$ est $\mathcal{C}^k$ au voisinage de $\varphi(x)$ $(\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})$

D'où $f \circ \varphi'^{-1}$ est $\mathcal{C}^k$ au voisinage de $\varphi'(x)$ $(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

cqfd.



~~2- Vecteur tangent~~

~~Germes~~

Soit $0 \leq l \leq k$

Déf : Soit Ω un ouvert de X, f une fct : $\Omega \to \mathbb{R}$,
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^l$ sur Ω ssi f est de classe $\mathcal{C}^l$ au voisinage de tout pts de Ω.

2- Notion de germe.

Soit $x \in X$, on note par $E_x = \{(U, f),\ U \in \mathcal{V}(x)$ dans X et f de classe $\mathcal{C}^l$ sur $U\}$

On introduit une relation d'équivalence sur E_x comme suit :

$(U, f)\ \mathcal{R}\ (U', f') \Leftrightarrow \begin{cases} \exists U'' \subset (U \cap U') \text{ voisinage ouvert de } x \\ \text{tel que } f/_{U''} = f'/_{U''} \end{cases}$ (exo)

- On note l'ens des classes d'équivalence par $E_x/\mathcal{R} = \mathcal{C}^l_x(X)$
- les classes d'équivalences (ie les elts de $\mathcal{C}^l_x(X)$) sont appelées germes $\mathcal{C}^l$ au point x.

Rq : $\mathcal{C}^l_x(X)$ est une Algèbre sur X.

3 - Vecteur tangent

Déf : On appelle vecteur tangent à X au pt x, toute forme linéaire $\xi : \mathcal{C}^\infty_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie : $\xi(\bar{f}\bar{g}) = f(x)\,\xi(\bar{g}) + g(x)\,\xi(\bar{f})$

(formule de Leibnitz / Règle au pt x) $\forall \bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{C}_x(X)$

Remarque :

1/ si $X = \mathbb{R}^n$, $\ell = 1$ et $x = 0$, $E = \{(U, f),\ U \in \mathcal{V}(0)$ et f $\mathcal{C}^1$ sur $U\}$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ $(v = (v_1, v_2, \dots, v_n))$

l'application $\frac{\partial}{\partial v} : E \longrightarrow \mathbb{R}$

(dérivée p/r à v) $f \longmapsto \frac{\partial}{\partial v}(f) = D_0 f \cdot v$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot v_i$$

est linéaire et de plus vérifie la formule / Règle de Leibnitz :

$$\frac{\partial}{\partial v}(fg) = f(0)\,\frac{\partial g}{\partial v} + g(0)\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

2/ si maintenant on a une application : $\xi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire et qui vérifie la Règle de Leibnitz au pt 0 :

$\forall f \in E$, $\xi(fg) = f(0)\,\xi(g) + g(0)\,\xi(f)$

alors existe-t-il un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi(f) = \frac{\partial f}{\partial v}$ $\forall f \in E$? (Réponse : Oui) propriétés:

1/ si f = cste alors $\xi(\bar{f})=0$, car:

i/ $(\bar{f}=\bar{1}) \Rightarrow \xi(\bar{1})=\xi(\bar{f}\bar{f})=2f(x)\xi(1)=2\xi(\bar{1})$

D'où $\xi(\bar{1})=0$

ii/ $\bar{f}=\bar{c}$, $\xi(\bar{c})=\xi(c\bar{1})=c\,\xi(\bar{1})=0$
(ξ linéaire)

Espace tangent en x

l'ensemble des vecteurs tangent à X au pt x est noté par $T_x(X)$.

proposition: $T_x(X)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

preuve:

1/ esp. vect (facile)

2/ $\dim T_x(X) = n$.

Formule de Taylor:

i/ Soit $B(a,r)$ boule de $\mathbb{R}^n$ et $h : B(a,r) \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}^n$

$x \longmapsto h(x) = h(a) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\,\lambda_i(x) \quad \forall x \in B(a,r)$

où les λ_i sont des fcts $\mathcal{C}^\infty$ et tel que

$\lambda_i(a) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(a)$. $\forall i=1,\dots,n$

en effet, pour $x \in B(a,r)$, on considère la fct g définie par: $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g(s) = h(a+s(x-a))$ $0\leq s\leq 1$

alors: $g(1)=h(x)$ et $g(0)=h(a)$

et on a: $g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(s)\,ds$

or : $$g'(s) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \frac{\partial h}{\partial x_i}(a+s(x-a))$$

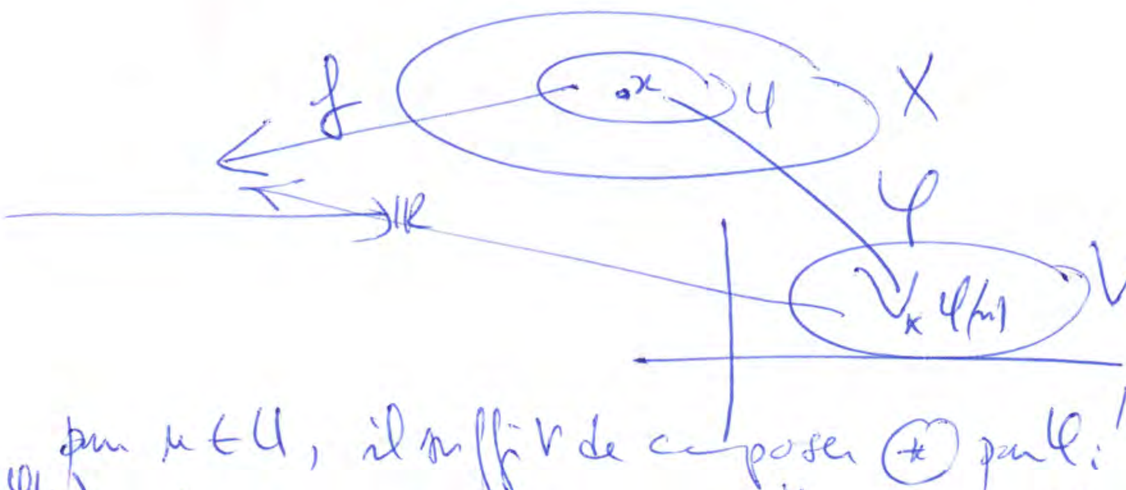
d'où : $$h(x) = h(a) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i}(a+s(x-a))\,ds$$

et on prend $\lambda_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i}(a+s(x-a))\,ds$

$\lambda_i \in \mathcal{C}^\infty$ (si $h \in \mathcal{C}^\infty$)

ii/ Considérons maintenant $f \circ \varphi^{-1} = h$, en appliquant la formule de Taylor au voisinage de $\varphi(x)$ on a :

$$(*) \quad \forall y \in V, \; f\circ\varphi^{-1}(y) = f\circ\varphi^{-1}(\cancel{x}\ \varphi(x)) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi_i(x))\lambda_i(y)$$



pour $u \in U$, il suffit de composer (*) par φ : avec $y = \varphi(u)$.

$$f(u) = f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x)) + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(u) - \varphi_i(x))\lambda_i(\varphi(u))$$

iii/ Soit maintenant $\xi \in T_x(X)$,

$$\xi(f) = \xi\left(f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))\right) + \sum_{i=1}^{n} \xi\left([\varphi_i(u) - \varphi_i(x)]\lambda_i(\varphi(u))\right)$$

$\boxed{\xi(fg) = f(x)\xi(g) + g(x)\xi(f)}$ $\Leftrightarrow$ $$= 0 + \sum \xi(\varphi_i(u))\lambda_i(\varphi(x))$$

$$\xi(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi(\varphi_i)\cdot\lambda_i(\varphi(x))$$

iv/ $\cancel{\lambda_i(\varphi(x)) = \frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial y_i}(\varphi(x))}$

or $\lambda_i(\varphi(x)) = \frac{\partial h}{\partial y_i}(\varphi(x))$ (voir i/)

i.e. $\lambda_i(\varphi(x)) = \frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial y_i}(\varphi(x))$

D'où : $\boxed{\xi(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi(\varphi_i) \frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial y_i}(\varphi(x))}$

finalement,

on note $\theta_i : \mathcal{C}^\infty_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\bar{f} \longmapsto \frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial y_i}(\varphi(x))$ (f représentant de $\bar{f}$)

a/ θ_i est bien déf car si $\bar{f}=\bar{g}$ alors $f=g$ dans un voisinage de x D'où $\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial y_i}(\varphi(x)) = \frac{\partial g\circ\varphi^{-1}}{\partial y_i}(\varphi(x))$

b/ $\theta_i(\bar{f}\bar{g}) = g(x)\,\theta_i(\bar{f}) + f(x)\,\theta_i(\bar{g})$ (exo)

D'où les $\theta_i \in T_x(X)$.

On conclut Donc que les $(\theta_i)_{i=1}^n$ engendre $T_x(X)$

Montrons maintenant que $(\theta_i)_{i=1}^n$ sont linéairement indépendants.

On remarque que : $\theta_i(\varphi_j) = \frac{\partial \varphi_j\circ\varphi^{-1}}{\partial y_i} = \frac{\partial y_j}{\partial y_i}(\varphi(x)) = \delta_{ij}$

i.e. $\theta_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$

alors soit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\theta_i = 0 \Rightarrow \forall j \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \theta_i(\varphi_j) = 0$

$\Rightarrow \forall i\ \alpha_i = 0$ cqfd.

D'où $(\theta_i)_{i=1}^n$ est une base de $T_x(X)$.

Rq :

$x=0$, $T_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$

Rép à la remarque (*)

on a : $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(hv)}{h} = Df.v$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}(0)\, v_i$

$$\xi(\bar{f}\bar{g}) = f(0)\,\xi(\bar{g}) + g(0)\,\xi(\bar{f})$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i\, \lambda_i(x) \quad \text{où} \quad \lambda_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi(f) = \sum \xi(x_i) \frac{\partial f}{\partial y_i}(0) \qquad v = \begin{pmatrix} \xi(x_1) \\ \xi(x_2) \\ \vdots \\ \xi(x_n) \end{pmatrix}}$$

IV- MORPHISME de variétés différentiables

1/ Définition : Soit X et Y 2 variétés diff de dim n et m de classe C

On appelle morphisme de variétés différentiables toute application d'une variété X dans une variété Y.

$$f : X \longrightarrow Y$$

2/ Classe C^h $(h \geq 1)$

Définition :

On dit que l'appli $h : X \longrightarrow Y$ (morphisme) est de classe C^h ssi pour tout pt $x \in X$

1/ $\exists$ une carte $\{U, \varphi, V\}$ de X tq $x \in U$

2/ $\exists$ une carte $\{U', \varphi', V'\}$ de Y tq $\varphi(x) \in U'$ et $\boxed{h(U) \subset U'}$