

Grandeurs Electriques de distributions de charges continues (partie 02)

Mr. K. Louzazna.
Univ. A.Mira de Béjaia. ALGERIE.

27 mai 2020

Document destiné aux étudiants de 1ère année (MI)

1 Section no.1

*/ cas d'une distribution de charge linéaire.

*/ cas d'un fil chargé vertical.

cas d'une distribution de charge linéaire

En général, la loi de composition (sommation) des grandeurs électriques dans le cas d'une distribution discrète de charges électriques de nombre fini est applicable pour les cas des distributions continues plus générales et de nombre indéterminé de charges électriques sur la base d'une substitution de la sommation par une intégration sur l'espace du milieu électrique traité :

$$\sum_i \dots \rightarrow \int_{\text{espace}} \dots d\vec{r}$$

si la sommation discrète est réalisée sur les charges électriques individuellement, la sommation continue (intégration) est effectuée sur des éléments (de longueur : 1D, de surface : 2D ou de volume : 3D) du milieu à traiter.

cas d'une distribution de charge linéaire

* / cas d'un milieu unidimensionnel isolant et chargé :

Pour le cas d'un fil (filliforme) isolant de longueur finie L et chargé avec une charge électrique Q^{fil} finie et uniforme, de densité de charge ρ :

$$Q^{fil} = \rho.L \quad \text{avec} \quad \rho > 0 \quad \text{et} \quad \rho = c^{ste}$$

Note : le terme filliforme est adopté pour les cas d'un fil dont le diamètre (ou rayon) est négligeable devant sa longueur, cette grande longueur est ainsi assimilable à l'infini.

En pratique, le fil est divisé en petits éléments de longueur $d\ell$ sur toute sa longueur L de telle sorte que chaque éléments de longueur $d\ell$ porteur d'une charge électrique dQ puisse créer en un point M de l'espace un champs électrique propre :

cas d'une distribution de charge linéaire

le vecteur du champs électrique élémentaire correspondant est défini par :

$$d\vec{\xi}_M = K \cdot \frac{dQ}{D^{+2}} \hat{u}_D \quad \text{avec} \quad D^{+2} = (x_{M\parallel} - x_{\parallel})^{+2} + y_{\perp}^{+2}$$

$$\text{et} \quad dQ = \rho \cdot d\ell = \rho \cdot dx_{\parallel}$$

D représentant la distance séparant l'élément de longueur $d\ell$ du point de calcul M :

$$D = |\vec{OM}| = \sqrt{(x_{M\parallel} - x_{\parallel})^{+2} + y_{M\perp}^{+2}}$$

\hat{u}_D un vecteur unité donnant l'orientation de cette direction spatiale entre l'élément $d\ell$ et le point M . Dans la base de calcul $\{\hat{u}_{\parallel}, \hat{u}_{\perp}\}$, ce vecteur unité est donné par :

cas d'une distribution de charge linéaire

$$\hat{u}_D = \begin{pmatrix} +\cos(\theta) \\ +\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_{||} \\ \hat{u}_{\perp} \end{matrix} = \begin{pmatrix} +\frac{(x_{M||}-x_{||})}{D} \\ +\frac{y_{M\perp}}{D} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_{||} \\ \hat{u}_{\perp} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} +\frac{(x_{M||}-x_{||})}{\sqrt{(x_{M||}-x_{||})^2+y_{M\perp}^2}} \\ +\frac{y_{M\perp}}{\sqrt{(x_{M||}-x_{||})^2+y_{M\perp}^2}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_{||} \\ \hat{u}_{\perp} \end{matrix}$$

en module :

$$\text{avec } |\hat{u}_D| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = +1$$

cas d'une distribution de charge linéaire

Après substitution, le champs électrique résultant :

$$d\vec{\xi}_M = \begin{pmatrix} d\xi_{||} \\ d\xi_{\perp} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_{||} \\ \hat{u}_{\perp} \end{matrix} = \begin{pmatrix} + \frac{K \cdot \rho \cdot (x_{M||} - x_{||})}{\left((x_{M||} - x_{||})^2 + y_{M\perp}^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx_{||} \\ + \frac{K \cdot \rho \cdot y_{M\perp}}{\left((x_{M||} - x_{||})^2 + y_{M\perp}^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx_{||} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_{||} \\ \hat{u}_{\perp} \end{matrix}$$

Le champs électrique total $\vec{\xi}_M^{fil}$ créé par le fil entier au point M est ainsi déterminé à partir d'une intégration de l'ensemble des champs électriques élémentaires précédents :

$$\vec{\xi}_M^{fil} = \int d\vec{\xi}_M$$

cas d'une distribution de charge linéaire

Les composantes ($\xi_{||}$ et ξ_{\perp}) du vecteur du champs électrique sont ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{||} = \int d\xi_{||} = +K.\rho. \int_0^L \frac{(x_{M||} - x_{||})}{\left((x_{M||} - x_{\perp})^2 + y_{M\perp}^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx_{||} \\ \xi_{\perp} = \int d\xi_{\perp} = +K.\rho.y_{M\perp} \int_0^L \frac{1}{\left((x_{M||} - x_{\perp})^2 + y_{M\perp}^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx_{||} \end{array} \right.$$

En procédant à un changement de la variable d'intégration $x_{||} \rightarrow x''$:

$$x' = (x_{M||} - x_{||}) \quad \text{to} \quad dx' = -dx_{||}$$

les bornes d'intégration correspondante :

$$x_{||} = 0 \quad \rightarrow \quad x' = x_{M||}$$

$$x_{||} = L \quad \rightarrow \quad x' = (x_{M||} - L)$$

cas d'une distribution de charge linéaire

Les expressions intégrales résultantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{||} = -K \cdot \rho \cdot \int_L^{x_{M||}-L} \frac{x'}{(x'^2+y_{M\perp}^2)^{\frac{3}{2}}} dx' = +K \cdot \rho \cdot \int_{x_{M||}-L}^L \frac{x'}{(x'^2+y_{M\perp}^2)^{\frac{3}{2}}} dx' \\ \xi_{\perp} = +K \cdot \rho \cdot y_{M\perp} \int_L^{x_{M||}-L} \frac{1}{(x'^2+y_{M\perp}^2)^{\frac{3}{2}}} dx' \end{array} \right.$$

Note : Les résultats des intégrations à appliquer :

$$\int_B^C \frac{x'}{(x'^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dx' = \frac{1}{\sqrt{a^2+B^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+C^2}}$$

$$\int_B^C \frac{1}{(x'^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dx' = \frac{C \cdot \sqrt{a^2+C^2}}{a^4+C^2 \cdot a^2} - \frac{B \cdot \sqrt{a^2+B^2}}{a^4+B^2 \cdot a^2}$$

cas d'une distribution de charge linéaire

Le champs électrique créé par un fil chargé en un point M de l'espace de coordonnées $(x_{M||}, y_{M\perp})$ est ainsi developpé sous la forme générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{||} = +K \cdot \rho \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{y_{M\perp}^2 + (x_{M||} - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{y_{M\perp}^2 + L^2}} \right] \\ \xi_{\perp} = +K \cdot \rho \cdot y_{M\perp} \cdot \left[\frac{L \cdot \sqrt{y_{M\perp}^2 + L^2}}{y_{M\perp}^4 + L^2 \cdot y_{M\perp}^2} - \frac{(x_{M||} - L) \cdot \sqrt{y_{M\perp}^2 + (x_{M||} - L)^2}}{y_{M\perp}^4 + (x_{M||} - L)^2 \cdot y_{M\perp}^2} \right] \end{array} \right.$$

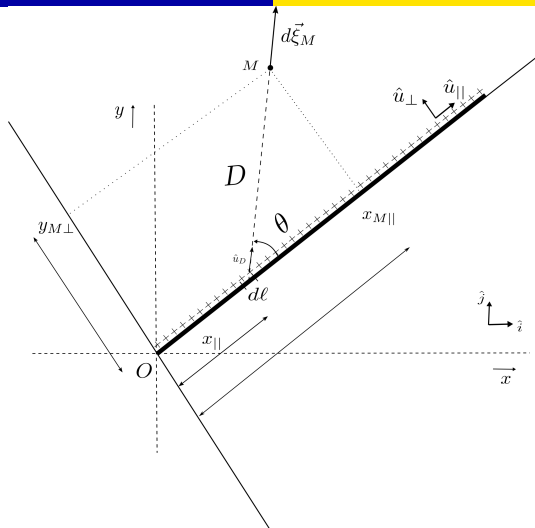


FIGURE – Schéma représentatif du fil isolant chargé et du point de calcul M de coordonnées fixes $(x_{M||}, y_{M\perp})$ dans la base de calcul $\{\hat{u}_{||}, \hat{u}_{\perp}\}$.

Exemple d'un fil isolant chargé et vertical

Pour le cas d'un fil isolant vertical de longueur $L = a + b$ et portant une charge électrique positive et uniforme de densité ρ de charge (linéaire ou linéique) $\rho > 0$. La charge électrique total du fil :

$$Q^{fil} = \rho.L = \rho.(a + b) \quad [A.sec]$$

$$\text{avec } L = |b - (-a)| = b + a$$

chaque élément de longueur $d\ell = dy$ du fil chargé de charge $dQ = \rho.d\ell$ va créer au point M (+a,+a) un champs électrique élémentaire de forme :

$$d\vec{\xi}_M = K \cdot \frac{dQ}{D^2} \hat{u}_D \quad \text{avec } dQ = \rho.dy$$

$$D^2 = a^{+2} + (a - y)^{+2}$$

Exemple d'un fil isolant chargé et vertical

dans la base cartésienne $\{\hat{i}, \hat{j}\}$, le vecteur unité \hat{u}_D est défini par :

$$\hat{u}_D = \begin{pmatrix} +\cos(\theta) \\ +\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{matrix} = \begin{pmatrix} +\frac{a}{\sqrt{a^2+(a-y)^2}} \\ +\frac{(a-y)}{\sqrt{a^2+(a-y)^2}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{matrix}$$

après substitution, le champs électrique résultant :

$$d\vec{\xi}_M = \begin{pmatrix} d\xi_x \\ d\xi_y \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{matrix} = \begin{pmatrix} +\frac{K \cdot \rho \cdot a}{(a^2+(a-y)^2)^{\frac{3}{2}}} dy \\ +\frac{K \cdot \rho \cdot (a-y)}{(a^2+(a-y)^2)^{\frac{3}{2}}} dy \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{matrix}$$

Exemple d'un fil isolant chargé et vertical

Les composantes (ξ_x, ξ_y) du champ électrique $\vec{\xi}_M$ créé par le fil chargé vertical au point M sont données par les expressions intégrales :

$$\vec{\xi}_M = \left(\begin{array}{l} \xi_x = \int d\xi_x = +K \cdot \rho \cdot a \cdot \int_{-a}^{+b} \frac{1}{(a^2 + (a-y)^2)^{\frac{3}{2}}} dy \\ \xi_y = \int d\xi_y = +K \cdot \rho \cdot \int_{-a}^{+b} \frac{(a-y)}{(a^2 + (a-y)^2)^{\frac{3}{2}}} dy \end{array} \right) \begin{array}{l} \hat{i} \\ \hat{j} \end{array}$$

en posant : $y' = a - y \quad \rightarrow \quad dy' = -dy$

avec :

$$y = -a \quad \rightarrow \quad y' = +2a$$

$$y = +b \quad \rightarrow \quad y' = a - b$$

Exemple d'un fil isolant chargé et vertical

$$\vec{\xi}_M = \begin{pmatrix} \xi_x = +K.\rho.a. \int_{+2a}^{a-b} \frac{1}{(a^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} dy' \\ \xi_y = -K.\rho. \int_{+2a}^{a-b} \frac{y'}{(a^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} dy' \end{pmatrix} \hat{i} \hat{j}$$

Les résultats des deux intégrations étant donnés par :

$$\int_B^C \frac{y'}{(y'^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dy' = \frac{1}{\sqrt{a^2+B^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+C^2}}$$

$$\int_B^C \frac{1}{(y'^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dy' = \frac{C.\sqrt{a^2+C^2}}{a^4+C^2.a^2} - \frac{B.\sqrt{a^2+B^2}}{a^4+B^2.a^2}$$

Exemple d'un fil isolant chargé et vertical

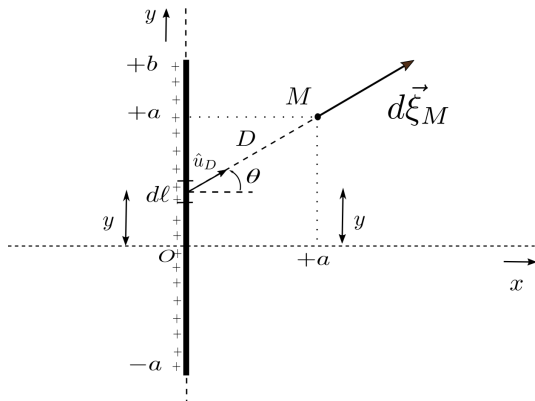


FIGURE – Schéma représentatif du fil isolant chargé vertical et du point de calcul M de coordonnées fixes $(+a, +a)$ dans la base catérienne de calcul $\{\hat{i}, \hat{j}\}$.

Exemple d'un fil isolant chargé et vertical

Note :

Les cas particuliers envisageables :

* / cas d'un fil vertical infini :

$$-\infty < y < +\infty$$

* / cas d'un fil vertical semi-infini (de moitié infini) :

$$-\infty < y \leq 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq y < +\infty$$