

Grandeurs Electriques de distributions de charges continues (partie 03)

Mr. K. Louzazna.
Univ. A.Mira de Béjaia. ALGERIE.

28 mai 2020

Document destiné aux étudiants de 1ère année (MI)

1 Section no.1

*/ cas d'un fil chargé circulaire (anneau).

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

Pour le cas d'un fil isolant de forme circulaire (anneau) de centre $O : (0, 0, 0)$ et de rayon constant R . Cet anneau est placé dans le plan basal XY et est chargé avec une charge électrique uniforme de densité de charge positive $\rho > 0$.

En pratique, le calcul du champs électrique créé par cet anneau en un point $M : (0; 0; z_M)$ positionné sur l'axe vertical $\vec{o}\vec{z}$ à une distance z_M de l'origine O (centre de l'anneau) est basé sur l'idée d'une division du périmètre de l'anneau en question en petit éléments de longueur $d\ell$ et sur le calcul des champs électriques correspondants :

$$\vec{d}\xi_M = K \cdot \frac{dQ}{D^{+2}} \cdot \hat{u}_D$$

Pour exploiter sa symétrie circulaire, l'anneau est divisé en deux (02) demi-anneaux (1) et (2) symétriques de manière à réaliser les calculs sur le demi-anneau (1) et appliquer les résultats obtenus au semi-anneau (2) par symétrie.

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

Pour le cas du demi-anneau (1), chaque élément de longueur $d\ell_1 = R.d\phi$ de portant une charge électrique $dQ_1 = \rho.d\ell_1$ va créer au point de calcul $M : (0, 0, z_M)$ un champs électrique propre :

$$\vec{d}\xi_{1M} = K \cdot \frac{dQ_1}{D_1^{+2}} \hat{u}_1$$

avec :

$$dQ_1 = \rho \cdot R \cdot d\phi_1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \phi_1 \leq \pi$$

$$D_1^{+2} = R^{+2} + z_M^{+2}$$

après substitution, le champs électrique élémentaire résultant :

$$\vec{d}\xi_{1M} = K \cdot \rho \cdot R \frac{d\phi_1}{(R^{+2} + z_M^{+2})} \hat{u}_1$$

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

Dans la base cylindrique $\{\hat{u}_R, \hat{u}_\phi, \hat{k}\}$, le vecteur unitaire u_1 est défini par :

$$\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ 0 \\ +\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{k} \end{matrix}$$

Note :

Par symétrie, le vecteur unité \hat{u}_2 du demi-anneau (2) est donné dans cette base cylindrique $\{\hat{u}_R, \hat{u}_\phi, \hat{k}\}$ par :

$$\hat{u}_2 = \begin{pmatrix} +\sin(\theta) \\ 0 \\ +\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{k} \end{matrix}$$

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

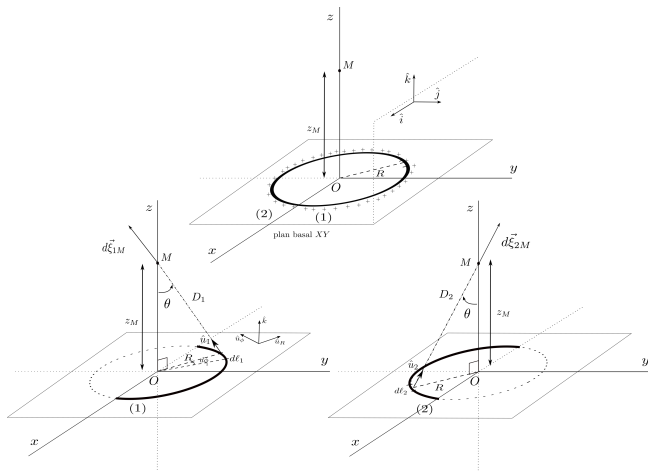


FIGURE – Schéma représentatif du fil isolant chargé vertical et du point de calcul M de coordonnées fixes $(+a, +a)$ dans la base catérienne de calcul $\{\hat{i}, \hat{j}\}$.

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

Ainsi, les composantes du vecteur du champs électrique crée au point M par le demi-anneau (1) sont décrites par les expressions intégrales suivantes :

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \xi_{1R} = \int d\xi_{1R} \\ \xi_{1\phi} = \int d\xi_{1\phi} \\ \xi_{1z} = \int d\xi_{1z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{k} \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\frac{K \cdot \rho \cdot R \cdot \sin(\theta)}{(R^2 + z_M^2)} \int_0^\pi d\phi_1 \\ 0 \\ +\frac{K \cdot \rho \cdot R \cdot \cos(\theta)}{(R^2 + z_M^2)} \int_0^\pi d\phi_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{k} \end{matrix}$$

avec :

$$\int_0^\pi d\phi_1 = \pi \quad , \quad \sin(\theta) = \frac{R}{D_1} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{z_M}{D_1}$$

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

Le vecteur du champs électrique crée par le demi-anneau (1) au pount M est donné par :

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \xi_{1R} = -\frac{K \cdot \rho \cdot \pi R^2}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \xi_{1\phi} = 0 \\ \xi_{1z} = +\frac{K \cdot \rho \cdot \pi R \cdot z_M}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{k} \end{matrix}$$

Par symétrie, le vecteur du champs électriques $\vec{\xi}_2$ crée au point M par le demi-anneau (2) est défini par :

$$\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \xi_{2R} = +\frac{K \cdot \rho \cdot \pi R^2}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \xi_{2\phi} = 0 \\ \xi_{2z} = +\frac{K \cdot \rho \cdot \pi R \cdot z_M}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{k} \end{matrix}$$

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

Pour le fil circulaire (anneau) chargé, le champ électrique qu'il va créer au point M est la somme (résultante) des deux vecteurs de champs électriques propres aux demi-anneaux (1) et (2) :

$$\vec{\xi}^{ann} = \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2 =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-K \cdot \rho \cdot \pi R^2}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \\ \frac{K \cdot \rho \cdot \pi R \cdot z_M}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{k} \end{matrix} + \begin{pmatrix} \frac{+K \cdot \rho \cdot \pi R^2}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \\ \frac{+K \cdot \rho \cdot \pi R \cdot z_M}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{k} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{+2K \cdot \rho \cdot \pi R \cdot z_M}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_R \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{k} \end{matrix}$$

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

Le module de ce vecteur du champs électriques de l'anneau est ainsi une gradeur dépendante de la position z_M du point M sur l'axe vertical $\vec{o}\vec{z}$:

$$\left| \vec{\xi}^{ann}(z_M) \right| = + \frac{K \cdot \rho \cdot 2\pi R \cdot z_M}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}} = + \frac{K \cdot Q^{ann} \cdot z_M}{(R^2 + z_M^2)^{\frac{3}{2}}}$$

la charge électrique totale du fil circulaire (anneau) traité $\tilde{A}\odot$ tant définie comme :

$$Q^{ann} = \rho \cdot 2\pi \cdot R \quad [A \cdot sec]$$

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

Note : Les cas limites à envisager : */ cas d'un point M positionné loin du centre O de l'anneau chargé ($z_M \gg R \rightarrow \frac{R^2}{z_M^2} = 0$) :

$$\left| \vec{\xi}^{ann}(z_M) \right|_{z_M \gg R} = + \frac{K \cdot Q^{ann} \cdot z_M}{z_M^3 \cdot \left(\frac{R^2}{z_M^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \approx + \frac{K \cdot Q^{ann}}{z_M^2} \approx \frac{A}{z_M^2}$$

*/ cas d'un point M positionné proche du centre O de l'anneau chargé ($z \ll R \rightarrow \frac{z_M^2}{R^2} = 0$) :

$$\left| \vec{\xi}^{ann}(z_M) \right|_{z_M \ll R} = + \frac{K \cdot Q^{ann} \cdot z_M}{R^3 \cdot \left(1 + \frac{z_M^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \approx + \frac{K \cdot Q^{ann} \cdot z_M}{R^3} \approx A \cdot z_M$$

Exemple d'un fil isolant chargé de forme circulaire

* / cas d'un point M positionné au centre O de l'anneau chargé
 ($z_M = 0$) :

$$\left| \vec{\xi}^{ann}(z_M = 0) \right| = + \frac{K \cdot Q^{ann} \cdot 0}{(R^2 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$