Chapitre 1

Rappels de probabilités

Chapitre 2

Le mouvement Brownien

Le Mouvement Brownien joue un rôle fondamental dans la théorie des processus stochastiques à temps continu.
Ce chapitre, présente les propriétés les plus importantes de ce processus, en particulier la propriété en rapport avec les martingales, ainsi que l'intégrale de Wiener définie par le mouvement Brownien.

Un peu d'historique

• En 1828, le botaniste Robert Brown observe le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau.
• En 1877, Delsaux explique les changements incéssants de direction de trajectoires par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau.
Un mouvement de ce type est qualifié de **mouvement brownien**.
• En 1900 bachelier, met en évidence le caractère markovien du mouvement brownien : la position d'une particule à l'instant $t + s$ dépend de sa position en t et non pas de sa position avant t, en vue d'étudier la bourse.
• En 1905, Einstein détermine la densité de transition du mouvement brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement brownien aux équations dérivées partielles (EDP) de type parabolique.
• La première étude mathématique est faite par Wiener (1923) et donne une démonstration

de l'existence du mouvement brownien.

• P. Levy (1948), s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du brownien.

Depuis, le mouvement brownien continue à passionner les probabilistes aussi bien pour l'étude de ses tralectoires que pour l'intégrale stochastique (Itô).

2.1 Le mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(B_t, t \geq 0)$ un processus stochastique sur cet espace.

Définition 2.1. Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un **mouvement Brownien**(M.B) (standard) si il est continu : $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue tel que

(a) $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine : $B_0 = 0$).

(b) $\forall s \leq t,\ B_t - B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$.

(c) $\forall n,\ \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, les variables aléatoires $B_{t_n} - B_{t_{n-1}},\ \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}$ sont indépendantes.

Remarque 2.1. • **(b)** est la propriété de stationnarité des accroissements du mouvement Brownien ($B_t - B_s \sim B_{t-s} - B_0$).

• La propriété **(c)** traduit que le mouvement Brownien est à accroissement indépendants.

(c)$\Longleftrightarrow$ **(c')** $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est indépendante de la tribu du passé avant s, $\sigma(B_u, u \leq s)$.

• La filtration naturelle est $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$.

• On note $B(t_i)$ la valeur de la trajectoire en t_i.

Généralisation Le processus (X_t) défini par $X_t = a + B_t$ est un Brownien issu de a.

On dit que $X = (X_t)$ est mouvement Brownien de drift μ si :

$X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où $B = (B_t)$ est un mouvement Brownien standard.

$X_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(x + \mu t, \sigma^2 t)$.

2.2 Propriétés

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle.

1. **Processus gaussien :**

   Proposition 2.1. *Le processus B est un processus gaussien, continu, sa loi est caractérisée par sa moyenne nulle et sa covariance $Cov(B_s, B_t) = s \wedge t$.*

   Preuve. Un processus est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a. gaussienne. On a $\sum_{i=0}^{n} a_i B_{t_i} = \sum_{i=0}^{n} b_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ avec $a_i = b_i - b_{i+1},\ i \leq n-1,\ a_n = b_n$. Comme $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ sont gaussienne indépendantes, donc le processus B est gaussien.
   d'autre part : $Cov(B_s, B_t) = \mathbb{E}(B_t B_s)$ car $\mathbb{E}(B_s) = \mathbb{E}(B_t) = 0$.
   Si $s \leq t$,

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t B_s) &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s + B_s^2] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)\mathbb{E}(B_s) + \mathbb{E}(B_s^2) \text{ car } B_t - B_s \text{ est indépendante de } deB_s \\ &= \mathbb{E}(B_s^2) = s \end{aligned}$$

   □

   Généralisation $(X_t = x + \mu t + \sigma B_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien d'espérance $x + \mu t$ et de covaiance $\mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_s - \mathbb{E}(X_s))\right] = \sigma^2 (s \wedge t)$.
   Notation On note $\mathbb{E}_x(f(B_s))$ l'espérance de $f(B_s)$ quand B est un mouvement Brownien issu de x :
   $\mathbb{E}_x(f(B_s)) = \mathbb{E}(f(x + B_s))$ où B est un M.B issu de l'origine.

2. **Scaling**

   Proposition 2.2. *Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien alors*
   (i) $\hat{B}_t = -B_t$ est un mouvement Brownien (par symétrie).
   (ii) $\tilde{B}_t = -\frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un M.B (propriété de Scaling : changement d'échelle)
   (iii) $\bar{B}_t = t B_{\frac{1}{t}}, \forall t \geq 0,\ \bar{B}_0 = 0$ est un M.B (inversion du temps)

3. **Propriété de Markov :** La propriété de Markov du M.B. est utilisé sous la forme : $\forall s; (W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t = B_{t+s} - B_s$ est un M.B. indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Théorème 2.1. *Pour toute fonction boréliènne f :*

$$\mathbb{E}(f(B_u)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(B_u)|\sigma(B_t)), \text{ pour } u > t.$$

Preuve. $\mathbb{E}(f(B_u)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(B_u - B_t + B_t)|\mathcal{F}_t) = \phi(u - t, B_t)$
avec $\phi(u-t, x) = \mathbb{E}[f(B_u - B_t + x)] = \mathbb{E}[f(Y + x)]$ où Y a la même loi que $B_u - B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, u - t)$.
De la même manière : $\mathbb{E}(f(B_u)|\sigma(B_t)) = \phi(u - t, B_t)$ plus précisément :
$\phi(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2s}} dy$

□

4. **Trajectoires** On admet que les trajectoires du mouvement Brownien sont continues et sont p.s "nulle part différentiables".

Théorème 2.2. *Soit n fixé et $t_j = \frac{j}{2^n} t, \forall j = \overline{0, 2^n}$. Alors*

$$\sum_{j=1}^{2^n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \longrightarrow t, \text{ quand } n \longrightarrow \infty, \text{ en m.q et p.s}$$

Preuve. Soit $Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2$ avec $t_j - t_{j-1} = \frac{t}{2^n}$
Pour montrer que $Z_t^n \xrightarrow{m.q} t$, on doit montrer que $\mathbb{E}[(Z_t^n - t)^2] \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.
puisque $\mathbb{E}(Z_t^n) = t$, on montre $Var(Z_t^n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.
$Var(Z_t^n) = \sum_{j=1}^{2^n} Var(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 = \sum_{j=1}^{2^n} 2(\frac{t}{2^n})^2 = 2^{n+1} \frac{t^2}{2^{2n}}$. (On a utilisé le fait que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2), Var(X^2) = 2\sigma^4$) (Voir Exercice 6 série 1).
D'où $\mathbb{E}(Z_t^n - t)^2 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. □

Proposition 2.3. *Soit une subdivision de $[0, t]$ caratérisé par $0 = t_0 < t_1 \leq \ldots \leq t_n = t$.*
Soit V_t la variation de la trajectoire du M.B sur $[0, t]$ définie par :

$$V_t(\omega) = \sup_{t_i} \sum_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|.$$

Alors $W_t(\omega) = \infty$ p.s

Preuve. $\sup\limits_{t_i}\sum\limits_i |B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)| \geq \sup_n \sum\limits_{k=1}^{2^n} |Y_k|$ avec $Y_k = B^*_{t_{k+1}} - B^*_{t_k}$ avec $t^*_k = \frac{k}{2^n}t$
$Z^n_t \leq \sup |B^*_{t_{k+1}} - B^*_{t_k}| \sum\limits_{k=1}^{2^n} |Y_k|$.
Quand $n \longrightarrow \infty$, $\sup |B^*_{t_{k+1}} - B^*_{t_k}| \longrightarrow 0$ $p.s$, par continuité uniforme des trajectoires sur $[0, t]$.
Le terme $\sum\limits_{k=1}^{2^n} |Y_k|$ est croissanten n, ne peut avoir une limite finie sans que Z^n_t ne converge vers 0. Cequi n'est pas le cas. □

5. **Propriétés de martingales**

   a) **Cas du Brownien** Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ le M.B. standard. Alors B et $(B^2_t - t, t \geq 0)$ sont des martingales par rapport à la filtration naturelle. Réciproquement, si $X = (X_t, t \geq 0)$ est un processus continu, tel que X et $(X^2_t - t, t \geq 0)$ sont des martingales, alors X est un M.B.

Preuve. $\Longrightarrow$) 0n a $\mathbb{E}(|B_t|) < \infty$ car $\mathbb{E}(|B_t|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(B^2_t)} = \sqrt{t}$ (d'après Cauchy-Schwartz). Soit $\mathcal{F}_s = \sigma(B_s, s \leq t)$.
Soit $s \leq t$: $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s|\mathcal{F}_s) = 0 + B_s$ car les accroissements sont indépendants ($B_t - B_s \perp B_s$) et B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable. D'où $(B_t, t \geq 0)$ est une martingale.
On a $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] = t - s$, d'autre part ona :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s &= \mathbb{E}(B^2_t + B^2_s - 2B_tB_s|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(B^2_t|\mathcal{F}_s) + B^2_s - 2B_s\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(B^2_t|\mathcal{F}_s) - B^2_s = t - s
\end{aligned}$$

On obtient alors $\mathbb{E}(B^2_t - t|\mathcal{F}_s) = B^2_s - s$. Donc $(B^2_t - t, t \geq 0)$ est une martingale. □

Proposition 2.4. *Soient B_1, B_2 deux movements Brownien indépendants. Alors le produit B_1B_2 est une martingale*

Preuve. On a $\frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + B_2)$ est un processus gaussien de covariance $s \wedge t$. Donc c'est un M.B, d'où $\frac{1}{2}(B_1(t) + B_2(t))^2 - t$ est une martingale.

Or $\frac{1}{2}(B_1(t)+B_2(t))^2 - t = \frac{1}{2}(B_1^2(t)-t)+\frac{1}{2}(B_2^2(t)-t)+B_1(t)B_2(t)$. Alors $(B_1(t)B_2(t), t \geq 0)$ est une martingale. $\square$

Définition 2.2. On dit que $B = (B_t, t \geq 0)$ est $\mathcal{G}_t$-mouvement Brownien si B et $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des $\mathcal{G}_t$-martingales.

Proposition 2.5. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, le processus $(\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t,\ t \geq 0)$ est une martingale. Réciproquement : si X est un processus continu tel que $(\exp(\lambda X_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t,\ t \geq 0)$ est une martingale pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $X = (X_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien.*

Preuve. On a $\mathbb{E}[\exp\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\exp\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}]$ car $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

Or $\mathbb{E}[\exp\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}] = \exp\{-\frac{1}{2}\lambda^2 t\}\mathbb{E}[e^{\lambda(B_t - B_s)}]$

comme $B_t - B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$ alors $\mathbb{E}[e^{\lambda(B_t - B_s)}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}$ (voir Exercice 6, série 1). D'où $\mathbb{E}[\exp\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}|\mathcal{F}_s] = 1$

par la suite $\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t} e^{-\lambda B_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s}|\mathcal{F}_s\right] = 1 = e^{-\lambda B_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s}\mathbb{E}[e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}|\mathcal{F}_s]$.

D'où $\mathbb{E}[e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}|\mathcal{F}_s] = e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 s}$.

Donc $(\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t,\ t \geq 0)$ est une martingale. $\square$

b) **Généralisation** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}^)$ un espace de probabilité filtré et B un $\mathcal{F}_t$-Brownien sur cet espace. Si $X_t = \mu t + \sigma B_t$ alors pour tout α réel :

$\big(\exp\{\alpha X_t - (\mu\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2)t\}, t \geq 0\big)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

En effet on a $(\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t,\ t \geq 0)$ est une martingale. On remplace B_t par $\frac{X_t - \mu t}{\sigma}$ et on pose $\lambda = \alpha\sigma$ et on aura le résultat.

Définition 2.3. Soit $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots, B_t^{(n)})^T$ un processus n-dimensionnel (T est la transposé d'un vecteur). On dit que B_t est un **Brownien multidimensionnel** si les processus $(B^{(i)}, i \leq n)$ sont des Browniens indépendants.

2.3 Intégrale de Wiener

Définition 2.4. On note $L^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions boréliennes $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de carré intégrable : $(\int_0^{+\infty} f^2(s)ds) < +\infty)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|f\|_2 = (\int_0^{+\infty} f^2(s)ds)^{\frac{1}{2}}$.

a) Fonction en escalier Pour $f_{]u,v[}$. On pose $\int_0^{+\infty} f(s)dB(s) = B(v) - B(u)$.
Soit f une fonction en escalier de la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}\mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i[}(x).$$

On pose $\int_0^{+\infty} f(s)dB(s) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$.
La v.a. $I(f) = \int_0^{+\infty} f(s)dB(s)$ est une v.a. gaussienne d'espérance nulle et de variance $I(f) = \int_0^{+\infty} f^2(s)ds = \|f\|_2^2$. En effet : $I(f)$ est gaussiène centée qar B l'est. De plus

$$\begin{aligned} Var(I(f)) &= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 var(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_0^{+\infty} f^2(s)ds \\ &= \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

L'intégrale est linéaire $I(f+g) = I(f) + I(g)$. De plus on a
Si $f,\ g$ sont des fonctions en escaliers : $\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)ds$ en effet :

$$\begin{aligned} Var(I(f+g)) &= Var[I(f) + I(g)] \\ &= Var(I(f)) + Var((g)) + 2\mathbb{E}[I(f)I(g)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} (f+g)^2(s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} f^2(s)ds + \int_{\mathbb{R}^+} g^2(s)ds + 2\int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)ds \end{aligned}$$

a) cas général On analyse, si $f \in L^2(\mathbb{R}^{)},\ \exists (f_n)$ une suite de fonctions en escaliers qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ vers f :

$$\int_0^{+\infty} |f_n - f|^2(x)dx \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Dans ce cas la suite (f_n) est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.

La suite de v.a. $F_n = \int_0^{+\infty} f_n(s)dB_s$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. En effet : $\|F_n - F_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \longrightarrow 0$ quand $n, m \longrightarrow \infty$ donc convergente.

Définition 2.5. On appelle $I(f)$ **l'intégrale stochastique** ou (**intégrale de Wiener**) de f par rapport au mouvement Brownien B.

2.3.1 Propriétés

1. L'application $f \longmapsto I(f)$ est linéaire et isométrique de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\Omega)$.
   - Linéaire : $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^+) : (f+g) = I(f) + I(g)$.
   - Isométrie : $\|I(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$. En effet :

   $\|I(f)\|_2^2 = \mathbb{E}[(I(f))^2] = Var(I(f)) = \int_0^\infty f^2(s)ds = \|f\|_2^2$.

   La propriété d'isométrie implique : $\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_0^\infty f(s)g(s)ds$.
2. $I(f)$ est une v.a. gaussienne de variance $\int_0^\infty f^2(s)ds$ vérifiant :
$$\mathbb{E}\left[B_t \int_0^\infty f(s)dB_s\right] = \int_0^t f(s)ds \tag{2.1}$$
   En effet $\mathbb{E}\left[B_t \int_0^\infty f(s)dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}dB_s \int_0^\infty f(s)dB_s\right] = \int_0^t f(s)ds$.

   Autrement dit (2.1) signifie :

   Si $\forall t, \mathbb{E}(ZB_t) = \int_0^t f(s)ds \Longrightarrow Z = \int_0^\infty f(s)dB_s$.

Processus lié à l'intégrale stochastique

Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, on définit
$$\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{]0,t]}(s)f(s)dB_s.$$

Théorème 2.3. *Pour $t \in [0,t], \forall T, \forall f \in L^2([0,T])$, soit $M_t = \int_0^t f(s)dB_s$. Alors*

a) M est une martingale continue : $\mathbb{E}(M_t) = 0$ et $Var(M_t) = \int_0^t f^2(s)ds$.

b) M est un processus gaussien, à accroissement indépendant, de covariance : $Cov(M(t, M_s) = \int_0^{t\wedge s} f^2(u)du$.

c) Le processus $(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds,\ t \geq 0)$ est une martingale.

d) $\forall f, g \in L^2([0,T])$, $\mathbb{E}\left(\int_0^t f(u)dB_u \int_0^s g(u)dB_u\right) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du$

2.3.2 Intégration par parties

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et B un mouvement Brownien. Alors

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f'(s)B_s ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. D'après (2.1) il suffit de vérifier

$\mathbb{E}\left[B_u \int_0^\infty f(s)dB_s\right] = \mathbb{E}\left[B_u(f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds)\right]$

1^{er} membre

$\mathbb{E}\left[B_u \int_0^\infty f(s)dB_s\right] = \int_0^{t\wedge u} f(s)ds$ (d'après (2.1)).

Pour le $2^{\text{ème}}$ membre

$\mathbb{E}\left[B_u(f(t)B_t)\right] = f(t)(t \wedge u)$

$\mathbb{E}\left[\int_0^t f'(s)B_s ds\right] = \int_0^t f'(s)(s \wedge u)ds$

puis $\int_0^t sf'(s)ds = tf(t) - \int_0^t f(s)ds$ (en utilisant l'intégration par parties classique). □

On peut alors écrire

$$d(B_t f(t)) = f(t)dB_t + B_t f'(t)dt.$$

2.3.3 Applications de l'intégrale de Wiener

1. **Le Brownien géométrique**

   Définition 2.6. Soit B un mouvement Brownien. On appelle **le Brownien géométrique**, le processus $X_t = X_0 e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}$ où $b \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ et X_0 une variable aléatoire.

   Remarque 2.2. Ce processus est appelé aussi processus **log-normal** car
   $\ln X_t = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t + \ln X_0 \rightsquigarrow \mathcal{N}(\ln X_0 + (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$.

   Proposition 2.6. *le processus* $(X_t e^{-bt}, t \geq 0)$ *est une martingale.*

2. **Processus d'Ornstein -Uhlenbeck** C'est le processus solution de l'équation de Langevin (équation différentielle stochastique)

$$dX_t + aX_t dt = \sigma dB_t$$

où $a,\ \sigma \in \mathbb{R}$ et B un mouvement Brownien.

Le théorème suivant montre que la solution de cette équation est explicite en termes d'une intégrale de Wiener :

Théorème 2.4. *L'équation de Langevin a pour unique solution*

$$X_t = e^{-at}\left(X_0 + \sigma \int_0^t e^{as} dB_s\right)$$

où X_0 est une variable aléatoire.

Veuillez m'envoyer vos réponses aux exercices et vos questions à l'adresse e-mail : *l_berdjoudj@yahoo.fr*