Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

**Faculté des Sciences Exactes**
**Département de Mathématiques /M.I**
**Master 1 (PSA)**

**2019/2020**

# Série de TD N 2 de MBCS

**Exercice 1.** Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle.

**1.** Calculer pour tout couple $(s;t)$ les quantités $\mathbb{E}(B_s B_t^2)$, $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s)$ et $\mathbb{E}(B_t|B_s)$.

**2.** On a si $X$ est une v.a. gaussienne centrée de variance $\sigma^2$, alors $\mathbb{E}(X^4) = 3\sigma^4$ (voir Exo6, série 1). Calculer $\mathbb{E}(B_t^2 B_s^2)$.

**3.** Quelle est la loi de $B_t + B_s$?

**4.** Soit $\theta_s$ une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_s$-mesurable.

Calculer pour $t \geq s$, $\mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s))$ et $\mathbb{E}[\theta_s(B_t - B_s)^2]$.

**5.** Calculer $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_t \leq a})$ et $\mathbb{E}(B_t \mathbf{1}_{B_t \leq a})$.

**6.** Calculer $\mathbb{E}(\int_0^t exp(B_s)ds)$ et $\mathbb{E}[\exp(\alpha B_t)\int_0^t \exp(\gamma B_s)ds])$.

**Exercice 2.** Soit les processus $M_t = B_t^2 - t$ et $N_t = e^{B_t - \frac{t}{2}}$, $t \geq 0$.

**1.** Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ sont des martingales.

**2.** Calculer la moyenne et la covariance de ces deux processus. Sont-ils des processus gaussiens?

**Exercice 3.** Parmi les processus suivants, quels sont ceux qui sont des martingales.

$M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s ds, \quad Z_t = B_t^3 - 3tB_t, \quad X_t = tB_t - \int_0^t B_s ds,$

$U_t = \sin B_t - \int_0^t B_s(\cos s)ds,\ V_t = \sin B_t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_s)ds \quad Y_t = t^2 B_t - 2\int_0^t B_s ds.$

**Exercice 4.** Soit le processus $(X_t)$ défini par

$$X_t = B_t - tB_1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

**1.** Montrer que $(X_t)$ est un processus gaussien, indépendant de $B_1$.

Préciser $\mathbb{E}(X_t)$ et $Cov(X_t, X_s)$ pour $s < t$. (Ce processus est appelé un "pont Brownien")

**2.** Soit $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$, $0 < t < 1$. Montrer que $(Y_t)$ a la même loi que $(X_t)$.

**Exercice 5.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. On définit les deux processus stochastiques

$$X_t = \int_0^t e^s dB_s \quad \text{et} \quad Y_t = e^{-t}X_t.$$

**1.** Calculer $\mathbb{E}(X_t)$, $\mathbb{V}(X_t)$, $\mathbb{E}(Y_t)$, $\mathbb{V}(Y_t)$.

**2.** Quelle est la loi de $(X_t)$ et de $(Y_t)$.

**3.** Calculer la fonction caractéristique de $Y_t$. En déduire que $Y_t \longrightarrow Y_\infty$, en loi quand $t \to \infty$, dont on précisera la loi.

**4.** Appliquer l'intégration par parties pour $X_t$ puis exprimer $dY_t$ en fonction de $Y_t$ et de $B_t$.