Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Master 1 (PSA)

2019/2020

Corrigé de la série de TD N 1 de MBCS

Exercice 1. 1. Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et $\mathcal{A} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$, $\mathcal{B} = \{\{2, 4, 6\}, \{2, 3, 4\}\}$.

$\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$. $(card(\mathcal{A}) = 4 = 2^2.)$

$\sigma(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, \{1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 6\},$
$\{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega\}$ $(card(\sigma(\mathcal{B})) = 16 = 2^4)$.

N.B: Si Ω est fini, le cardinal d'une tribu sur Ω est toujours égal à 2^m avec $m \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux tribus sur Ω.

Montrons que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est une tribu sur Ω:

Il suffit de vérifier les trois conditions de la définition d'une tribu.

i) $\emptyset \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ (car $\emptyset \in \mathcal{F}_1$ et $\emptyset \in \mathcal{F}_2$)

ii) $\forall\, A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, A^c \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ (car $A^c \in \mathcal{F}_1$ et $A^c \in \mathcal{F}_2$).

iii) Soit $(\mathbf{A_n})_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \Longrightarrow \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathbf{A_n} \in \mathcal{F}_1$ et $\bigcup\limits_{n\geq 1} \mathbf{A_n} \in \mathcal{F}_2$ (car $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des tribus).

Donc $\bigcup\limits_{n\geq 1} \mathbf{A_n} \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Les conditions d'une tribu étant vérifiées, donc $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est une tribu sur Ω.

• Montrons qu'en général $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ n'est pas une tribu:

Contre exemple

Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$ deux tribus sur Ω. Alors

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu sur Ω car
$\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Exercice 2. 1. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et $\mathbf{E} \subset \Omega$.

Montrons que

$\mathcal{F}_{\mathbf{E}} = \{A \cap \mathbf{E}, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur $\mathbf{E}$ (tribu trace de $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{E}$).

$\mathcal{F}_{\mathbf{E}} = \mathcal{F} \cap \mathbf{E}$

i) $\emptyset = \emptyset \cap \mathbf{E} \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}}$.

ii) Soit $A \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}} \Longrightarrow \exists B \in \mathcal{F}:\ A = B \cap \mathbf{E}$

$C_{\mathbf{E}}A = C_{\mathbf{E}}(B \cap \mathbf{E}) = C_{\mathbf{E}}B \cap \mathbf{E} \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ car $C_{\mathbf{E}}B \in \mathcal{F}$.

iii) Soit $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ tel que $A_n = B_n \cap \mathbf{E}$. Alors

$\bigcup A_n = \bigcup (B_n \cap \mathbf{E}) = \bigcup (B_n) \cap \mathbf{E} \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ car $\bigcup (B_n) \in \mathcal{F}$.

Les conditions de la définition d'une tribu étant vérifiées, donc $\mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ est une tribu sur $\mathbf{E}$.

2. Soit$f : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ une application et $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{G}$.

Montrons que $\mathcal{T}' = f^{-1}(\mathcal{T})$ est une tribu sur $\mathbb{F}$

On a $\mathcal{T}' = \{f^{-1}(A),\ A \in \mathcal{T}\}$

i) On a $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{T}'$ car $\emptyset \in \mathcal{T}$.

ii) Soit $B \in \mathcal{T}' \Longrightarrow B = f^{-1}(A)$ avec $A \in \mathcal{T}$ alors $C_{\mathbb{F}}B = C_{\mathbb{F}}(f^{-1}(A)) = f^{-1}(C_{\mathbb{G}}A) \in \mathcal{T}'$ car $C_{\mathbb{G}}A \in \mathcal{T}$.

iii) Soit $(B_n) \in \mathcal{T}' \Longrightarrow B_n = f^{-1}(A_n)$ avec $A_n \in \mathcal{T}$ alors $\bigcup B_n = \bigcup f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup A_n) \in \mathcal{T}'$ car $\bigcup A_n \in \mathcal{T}$.

D'où $\mathcal{T}'$ est une tribu sur $\mathbb{F}$.

Exercice 3. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne et $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ une variable aléatoire.

Montrons que $g(X)$ est une variable aléatoire.

On a $g(X) = g \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Longrightarrow (g \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$ car $g^{-1}(B) \in \mathbb{R}$.

donc $(g(X))^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. d'où $g(X)$ est une variable aléatoire.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que: $X - Y$ est indépendante de $\mathcal{G}$ d'espérance mathématique m et de variance σ^2 et Y est $\mathcal{G}$-mesurable.

1. $\mathbb{E}(X - Y|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X - Y) = m$ car $X - Y$ est indépendante de $\mathcal{G}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) &= m + \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) \\
&= m + Y \text{ car } Y \text{ est } \mathcal{G}\text{-mesurable}
\end{aligned}$$

2. $\mathbb{E}[(X - Y)^2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[(X - Y)^2] = \sigma^2 + m^2$ car $X - Y$ est indépendante de $\mathcal{G}$, il en est de même pour $(X - Y)^2$. Or $\mathbb{E}[(X - Y)^2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) + Y^2 - 2Y\ \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. D'où on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) &= \sigma^2 + m^2 - Y^2 + 2Y(m + Y) \\
&= \sigma^2 + m^2 + Y^2 + 2Ym \\
&= \sigma^2 + (Y + m)^2
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ des sous tribus de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire.

1. Montrons que: $\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)]^2) + \mathbb{E}([\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)]^2) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)]^2)$

On pose $X_1 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1),\ X_2 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)$

En utilisant la propriété **(g)** de l'espérance conditionnelle et le théorème de l'espérance totale (revoir le cours):

On a $X_1 = \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1)$ et $\mathbb{E}(XX_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XX_1|\mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(X_1\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(X_1^2)$

par conséquent

$\mathbb{E}[(X-X_1)^2]=\mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X_1X)+\mathbb{E}(X_1^2)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X_1^2)$.

De la même manière on trouve

$\mathbb{E}(XX_2)=\mathbb{E}(X_2^2)$ et $\mathbb{E}(X_1X_2)=\mathbb{E}(X_1^2)$

$\mathbb{E}[(X-X_2)^2]=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X_2^2)$ et $\mathbb{E}[(X_1-X_2)^2]=\mathbb{E}(X_2^2)-\mathbb{E}(X_1^2)$. D'où $\mathbb{E}[(X-X_2)^2]+\mathbb{E}[(X_1-X_2)^2]=\mathbb{E}[(X-X_1)^2]$.

2. Montrons que $Var(X)=\mathbb{E}(Var(X|\mathcal{F}_1))+Var(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1))$.

On a $Var(X|\mathcal{F}_1)=\mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}_1)-(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1))^2$. Alors en appliquant l'espérance mathématique au deux membres on aura

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Var(X|\mathcal{F}_1)) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}_1)]-\mathbb{E}[(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1))^2] \\
&= \mathbb{E}(X^2)-(Var(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)))+\mathbb{E}^2[(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1))] \\
&= \mathbb{E}(X^2)-Var(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1))-\mathbb{E}^2(X) \\
&= Var(X)-Var(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)).
\end{aligned}$$

D'où $Var(X)=\mathbb{E}(Var(X|\mathcal{F}_1))+Var(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1))$.

Exercice 6. 1. $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Calculons $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{E}(X^4)$, $\mathbb{E}(|X|)$, $\mathbb{E}(|X^3|)$ et $\mathbb{E}(e^X)$.

• $\mathbb{E}(X^3)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

On pose $f(x)=x^3e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^3) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)dx\right] \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\int_{+\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)dx\right] \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{0}^{+\infty}f(x)dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)dx\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(X^3)=0$

• $\mathbb{E}(X^4)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

Utilisons l'intégration par parties: On pose $x^3=u\Longrightarrow du=3x^2dx$,

$dv=xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Longrightarrow v=-\sigma^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ alors

$\mathbb{E}(X^4)=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[-x^3\sigma^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{+\infty}+\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}3x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}3x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$ (le premier terme est nul).

Intégrons une 2ème fois par parties:

On pose $u=x\Longrightarrow du=dx$, $dv=xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Longrightarrow v=-\sigma^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$\mathbb{E}(X^4)=\frac{6\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-x\sigma^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{+\infty}+\frac{6\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

Comme $\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = 1$. Alors $\mathbb{E}(X^4) = 3\sigma^4$.

• $\mathbb{E}(|X|) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 -xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$.

En posant dans la 1ère intégrale $u = -x$ on aura après calcul $\mathbb{E}(|X|) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$.

• $\mathbb{E}(|X^3|) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 -x^3e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^3e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^3e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$.

En intégrant par parties: $u = x^2$, $\;dv = xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, on aura $\mathbb{E}(|X^3|) = \frac{4\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}$.

• $\mathbb{E}(e^X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

or $e^{x-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{2}}$. Donc

$\mathbb{E}(e^X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$ car $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$.

Donc $\mathbb{E}(e^X) = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$.

2. $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m;\sigma^2)$.

a) • $Y = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$. On peut le vérifier soit par:

$F_Y(y) = F_X(m+\sigma y) \Longrightarrow f_Y(y) = \sigma f_X(m+\sigma y)$. Donc

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

soit en utilisant les fonctions caractéristiques: 0n a $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{itm-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\varphi_Y(t) = e^{-i\frac{tm}{\sigma}}\varphi_X(\frac{t}{\sigma}) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \forall t \in \mathbb{R}$.

• On a : $X - m \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2) \Longrightarrow \mathbb{E}(|X-m|) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$ (voir question 1).

b) • Montrons que $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \exp(\lambda m + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2)$.

$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x}e^{-\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-m)^2-2\lambda x\sigma^2]}dx$

or $e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-m)^2-2\lambda x\sigma^2]} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(m+\lambda\sigma^2)]^2}e^{\lambda m+\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$. D'où

$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\lambda m+\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(m+\lambda\sigma^2)]^2}dx = e^{\lambda m+\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}$.(C.Q.F.D).

• Calculer $\mathbb{E}(Xe^{\lambda X})$.

$\mathbb{E}(Xe^{\lambda X}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{\lambda x}e^{-\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx = e^{\lambda m+\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(m+\lambda\sigma^2)]^2}dx$

or $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(m+\lambda\sigma^2)]^2}dx = m + \lambda\sigma^2$ (la moyenne de $\mathcal{N}(m+\lambda\sigma^2,\sigma^2)$).

Donc $\mathbb{E}(Xe^{\lambda X}) = (m+\lambda\sigma^2)e^{\lambda m+\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}$.

Exercice 7. Soit X une v.a. sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et $Y(w) = e^{X(w)}$, $\forall w \in \Omega$

1. $F_Y(y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \ln y) = F_X(\ln y)$

2. Supposons que X est continue. $f_Y(y) = \frac{1}{y}f_X(\ln y)$.

3. On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. $f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln y)^2}, \forall\ y \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq 1) &= \int_0^1 f_Y(y)dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln y)^2}dy \\
&= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}du \quad \text{(en posant } u = \ln y) \\
&= F_X(0) = 0.5
\end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $X_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$

$X_n \overset{L^2}{\longrightarrow} X \Longrightarrow m_n \longrightarrow m$ et $\sigma_n^2 \longrightarrow \sigma^2$.

D'où $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 9. Soient $X, Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

1. Si X et Y sont indépendantes, alors $(X;Y)$ est un vecteur gaussien car toute combinaison linéaire de ses composantes est gaussienne, en particulier $X+Y$ est gaussienne.

Soit T une variable aléatoire indépendante de X et telle que $\mathbb{P}(T=+1) = \mathbb{P}(T=-1) = 1/2$ (veuillez corriger cette probabilité sur la série de TD).

2. Montrer que $Z = TX$ est gaussienne:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}(XT < z) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X < z) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-X < z) \\
&= \frac{1}{2}F_X(z) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X > -z) \\
&= \frac{1}{2}F_X(z) + \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(X < -z)) \\
&= \frac{1}{2}F_X(z) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X < z) \\
&= F_X(z)
\end{aligned}$$

Donc $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

3.

$$\begin{aligned}
Cov(X,Z) &= \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) \\
&= \mathbb{E}(XZ) \\
&= \mathbb{E}(XTX) \\
&= \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X^2)(\text{car } T \text{ et } X \text{ sont indépendantes}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si on conclut que X et Z sont indépendantes alors $X + Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,2)$

or $\mathbb{P}(X+Z=0) = \mathbb{P}(X(1+T)=0) = \mathbb{P}(1+T=0) = 1/2$ contradiction car $X+Z$ est une v.a. continue (la probabilité attachée en un point doit être nulle). D'où $X+Z$ n'est pas gaussienne et X et Z ne sont pas indépendantes et donc (X,Z) n'est pas un vecteur gaussien.

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

1. a) Montrons que $\mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))$

On a X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donc elles sont $\mathcal{F}$-mesurables. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(XY|\mathcal{G})|\mathcal{F}\right] &= \mathbb{E}\left[Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\right]
\end{aligned}$$

b) $X \in L^2(\Omega)$ et $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Y$ et $\mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) = Y^2$. Montrons que $X = Y$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-Y)^2|\mathcal{G}\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2XY + Y^2|\mathcal{G}\right] \\
&= \mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y^2|\mathcal{G}) - 2\mathbb{E}(XY|\mathbb{G}) \\
&= Y^2 + Y^2 - 2Y^2 = 0
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}((X-Y)^2|\mathcal{G})\right] = \mathbb{E}((X-Y)^2) = 0 \Longrightarrow X = Y$.

2. Soit $X = X_1 + X_2$. On suppose que X_1 est gaussienne et indépendante de $\mathcal{G}$, que X_2 est $\mathcal{G}$-mesurable.

a) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1 + X_2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1) + X_2$.

$\mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1^2|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(X_2^2|\mathcal{G}) + 2\mathbb{E}(X_1X_2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1^2|) + X_2^2 + 2X_2\mathbb{E}(X_1)$

$Var(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) - (\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^2 = Var X_1$.

b) $\mathbb{E}(e^\lambda X|\mathcal{G})$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^\lambda X|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}(e^\lambda X_1 e^\lambda X_2|\mathcal{G}) \\
&= e^\lambda X_2 \mathbb{E}(e^\lambda X_1) \\
&= e^\lambda X_2 \exp\{\lambda \mathbb{E}(X_1) + \frac{\lambda^2}{2} var(X_1)\} \text{ (voir Exercice 6).}
\end{aligned}$$

Exercice 11. Dans $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t))$, on considère $(M_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}(M_t^2|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(M_s^2|\mathcal{F}_s) - 2\mathbb{E}(M_tM_s|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_t^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2
\end{aligned}$$

2. Par passage à l'espérance, on trouve $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_s^2) \geq 0, \quad \forall t > s$.

3. Soit ϕ définit par $\phi(t) = \mathbb{E}(M_t^2)$.

Soit $t \geq s \Longrightarrow \phi(t) - \phi(s) = \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_s^2) \geq 0$.

D'où ϕ est croissante.

Exercice 12. L'espace Ω est muni d'une filtration (F_t).

1. Soit $s \leq t$ et $Y_t = \mathbb{E}(X|F_t)$.

On a Y_t est intégrable et $\mathcal{F}_t$-mesurable et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|F_t)|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|F_s)|\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(X|F_s) = Y_s
\end{aligned}$$

Donc (Y_t) est une martingale.

2. On dit que M est une surmartingale si M_t est adapté, intégrable et
$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_t) \leq M_s; \forall s \leq t$.

Le processus M est une sous-martingale si $-M$ est une sur-martingale.

a) Montrons que si M est une martingale et A un processus croissant adapté $(A_s \leq A_t; \forall s \leq t)$ alors $M - A$ est une sur-martingale.

Soit $Z_t = M_t - A_t$ et $s \leq t$: on a $\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) = M_s - \mathbb{E}(A_t|\mathcal{F}_s)$ et comme $A_s \leq A_t$ ou $-A_t \leq -A_s$, $\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s - \mathbb{E}(A_s|\mathcal{F}_s) = M_s - A_s = Z_s$. Donc $M - A$ est une sur-martingale.

b) Soit M une martingale. Que peut-on dire de M^2?

On a $\forall s \leq t,\ \mathbb{E}(M_t^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] + M_s^2 \geq M_s^2$. D'où (M_t^2) est une sous-martingale.