Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Master 1 (PSA)

2019/2020

Corrigé de la Série de TD N 2 de MBCS

Exercice 1. $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle.

1. Soit $s; t \in \mathbb{R}^+$,

• $\mathbb{E}(B_s B_t^2) = ?$

On a $\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(B_s B_t^2|\mathcal{F}_s)\right]$ (d'après le théorème de l'espérance totale).

<u>1^{er} **cas** $t > s$</u>

$\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}\left[B_s \mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{F}_s)\right]$ (car B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable).

On sait que $B_t^2 - t$ est une martingale donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t^2 - t + t|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(t|\mathcal{F}_s) \\
&= B_s^2 - s + t
\end{aligned}$$

par la suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_s B_t^2) &= \mathbb{E}[B_s(B_s^2 - s + t)] \\
&= \mathbb{E}(B_s^3 - sB_s + tB_s) \\
&= 0 \text{ car } \ \mathbb{E}(B_s) = \mathbb{E}(B_s^3) = 0 \text{ car } B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, s)
\end{aligned}$$

<u>$2^{\text{ème}}$ **cas** $s > t$</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_s B_t^2) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(B_s B_t^2|\mathcal{F}_t)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_t^2 \mathbb{E}(B_s|\mathcal{F}_t)\right] \\
&= \mathbb{E}(B_t^2 B_t) \text{ car } B_s \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{martingale} \\
&= \mathbb{E}(B_t^3) = 0 \text{ car } B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t).
\end{aligned}$$

• si $s < t$, $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s$ car B est une martingale.
si $t < s$, $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s$ car B_t est $\mathcal{F}_s$-mesurable.

• $\mathbb{E}(B_t|B_s) =?$

<u>1^{er} **cas** $t < s$</u>

$\mathbb{E}(B_t|B_s) = \mathbb{E}(B_t - \frac{t}{s}B_s) + \frac{t}{s}B_s = \frac{t}{s}B_s$. car $B_t - \frac{t}{s}B_s$ est centrée et indépendante de B_s. En effet: $(B_t - \frac{t}{s}B_s, B_s)$ est un couple gaussien centé de covariance:

$$\begin{aligned} Cov(B_t - \frac{t}{s}B_s, B_s) &= Cov(B_t, B_s) - \frac{t}{s}VarB_s \\ &= t - \frac{t}{s}s \\ &= t - t = 0 \end{aligned}$$

<u>$2^{\text{ème}}$ **cas** $s < t$</u>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t|B_s) &= \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s|B_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s|B_s) + B_s \\ &= B_s \text{ car } B_t - B_s \text{ est indépendante de } B_s \text{ et est centrée} \end{aligned}$$

2. On a si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\mathbb{E}(X^4) = 3\sigma^4$ (voir Exo6, série 1).
$\mathbb{E}(B_t^2 B_s^2) = ?$
<u>1^{er} **cas** $s \leq t$</u>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2 B_s^2) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(B_t^2 B_s^2|\mathcal{F}_s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B_s^2 \mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{F}_s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B_s^2(B_s^2 - s + t)\right] \text{ car } B_t^2 - t \text{ est une martingale} \\ &= \mathbb{E}(B_s^4) - s\mathbb{E}(B_s^2) + t\mathbb{E}(B_s^2) \\ &= 2s^2 + ts \end{aligned}$$

<u>$2^{\text{ème}}$ **cas** $t \leq s$</u>
De la même manière on trouve $\mathbb{E}(B_t^2 B_s^2) = 2t^2 - ts$.

3. Loi de $B_t + B_s$?
$B_t + B_s$ est gaussienne centrée car B est un processus gaussien centré.
D'autre part on peut écrire $B_t + B_s = B_t - B_s + 2B_s$ par la suite $Var(B_t + B_s) = Var(B_t - B_s) + 4VarB_s$ car $B_t - B - s$ est indépendante de B_s.
D'où si $s \leq t, Var(B_t + B_s) = t - s + 4s = t + 3s$ et $B_t + B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t + 3s)$
Si $t \leq s$ $B_t + B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, s + 3t)$.

4. θ_s une v.a. bornée $\mathcal{F}_s$-mesurable.
Pour $t \geq s$ calculons, $\mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s))$ et $\mathbb{E}[\theta_s(B_t - B_s)^2]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s)) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\theta_s \mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s)\right] = 0 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s)^2) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\theta_s\mathbb{E}((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s)\right] \\
&= (t-s)\mathbb{E}(\theta_s)
\end{aligned}$$

5. $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_t \leq a}) = \mathbb{P}(B_t \leq a) = \mathbb{P}(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \leq \frac{a}{\sqrt{t}})$

Or $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,t) \Longrightarrow \frac{B_t}{\sqrt{t}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

D'où $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_t \leq a}) = \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(\frac{a}{\sqrt{t}}$ avec ϕ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

$\mathbb{E}(B_t\mathbf{1}_{B_t \leq a}) = \int_{-\infty}^{a} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}e^{-\frac{x^2}{2t}}} dx \sqrt[n]{}$

on pose $y = \frac{x}{\sqrt{t}} \Longrightarrow x = y\sqrt{t}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t\mathbf{1}_{B_t \leq a}) &= \sqrt{t}\int_{-\infty}^{a/\sqrt{t}} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
&= \sqrt{\frac{t}{2\pi}}\left[-e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{a/\sqrt{t}} \\
&= -\sqrt{\frac{t}{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2t}}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^t \exp(B_s)ds) &= \int_0^t \mathbb{E}(e^{B_s})ds \\
&= \int_0^t \exp\{\mathbb{E}(B_s) + \frac{1}{2}Var(B_s)\}ds \\
&= \int_0^t e^{\frac{s}{2}}ds \quad car\ B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,s) \\
&= 2(e^{\frac{t}{2}} - 1)
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[\exp(\alpha B_t)\int_0^t \exp(\gamma B_s)ds]) = \int_0^t \mathbb{E}(e^{\alpha B_t + \gamma B_s})$.

On a $\alpha B_t + \gamma B_s = \alpha(B_t - B_s) + \alpha + \gamma)B_s$ est une v.a gaussienne car $B_t - B_s$ et B_s sont deux gaussiènne indépendantes.

$\mathbb{E}(\alpha B_t + \gamma B_s) = 0$ et

$$\begin{aligned}
Var(\alpha B_t + \gamma B_s) &= \alpha^2 Var(B_t - B_s) + (\alpha+\gamma)^2 Var(B_s) \\
&= \alpha^2(t-s) + (\alpha+\gamma)^2 s \\
&= \alpha^2 t + (\gamma^2 + 2\alpha\gamma)s
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{E}(e^{\alpha B_t + \gamma B_s})ds &= \int_0^t \exp\{\frac{\alpha^2 t + (\gamma^2 + 2\alpha\gamma)s}{2}\}ds \\
&= e^{\frac{\alpha^2 t}{2}}\int_0^t e^{\frac{1}{2}(\gamma^2+2\alpha\gamma)s}ds \\
&= \frac{2}{\gamma^2 + 2\alpha\gamma}e^{\frac{\alpha^2 t}{2}}\left(e^{\frac{1}{2}(\gamma^2+2\alpha\gamma)t} - 1\right).
\end{aligned}$$