Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
L3 Maths et Master 1 P.S.A.

2019/2020

Série de TD d'Optimisation Avec Contraintes

Exercice 1. Considérons le problème $(P1)$ suivant:

$$(P1) \quad \begin{cases} min\ f(x,y) = -2x - y, \\ \quad -2x + y \leq 4, \\ \quad x + y \leq 10, \\ \quad x - y \leq 6, \\ \quad x \geq 0 \ \text{ et } \ y \geq 0, \end{cases}$$

1. Résoudre graphiquement le problème $(P1)$;
2. Le vecteur $d_0 = (1,3)^t$ est-il une direction de descente pour f au point $X^0 = (1,1)^t$?
3. Posons $X^1_\rho = X^0 + \rho d_0$. Déterminer les valeurs de ρ pour lesquelles X^1_ρ est réalisable.
4. Déterminer, ρ_{min}, la valeur de ρ qui minimise f le long de la direction d_0. Notons $X^1 = X^0 + \rho_{min} d_0$.
5. Le vecteur $d_1 = (1,-1)^t$ est-il une direction de descente pour f au point X^1?
6. Posons $X^2_\rho = X^1 + \rho d_1$. Déterminer les valeurs de ρ pour lesquelles X^2_ρ est réalisable.
7. Déterminer, ρ_{min}, la valeur de ρ qui minimise f le long de la direction d_1. Notons $X^2 = X^1 + \rho_{min} d_1$. Conclure.
8. Déterminer toutes les directions de descente au point X^2;
9. Déterminer toutes les directions admissibles au point X^2;
10. y'a t-il des directions admissibles et de descente à la fois au points X^2. Conclure.

Exercice 2. Soit le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ et } x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0\}.$$

1. Le point $(0,0)^t$ est-il un point régulier? Déterminer l'ensemble des directions admissibles en $(0,0)^t$.
2. Même questions si on suppose maintenant que Ω est défini par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \text{ et } x^2 + (y-1)^2 - 1 \leq 0\}.$$

Exercice 3. Résoudre graphiquement les programmes linéaires suivants:

- 1^{er} problème

$$(P2)\quad \begin{cases} min\ Z_1 = x_2 - x_1 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- $2^{\text{ième}}$ problème

$$(P3)\quad \begin{cases} max\ Z_3 = 3x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- $3^{\text{ième}}$ problème

$$(P4)\quad \begin{cases} max\ Z_4 = x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Considérons le problème d'optimisation suivant:

$$(P5)\qquad \begin{cases} max\ f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2, \\ \quad 2x_1 + x_2 \leq 18, \\ \quad \frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq 8, \\ \quad x_2 \leq \alpha, \\ \quad x_1 \leq 8, \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Résoudre graphiquement le problème $(P5)$ suivant les valeurs du paramètre réel α.

Exercice 5. Considérons le problème de minimisation suivant:

$$(P6)\quad \begin{cases} min\ f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y, \\ g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 5 \leq 0, \\ g_2(x, y) = 3x + y - 6 \leq 0, \end{cases}$$

1. Le problème $(P6)$ admet-t-il une solution? Est-elle unique?
2. Soit $X = (2, 0)^t$.
   (a) Quelles sont les contraintes actives en X?

(b) Ce point est-il régulier?

(c) Vérifie-t-il les conditions de Karush-Kuhn-Tucker? Conclure.

Exercice 6. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ un élément de $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne. Considérons le problème de minimisation suivant:

$$(P7) \quad \begin{cases} min\ f(x) = \|x\|^2, \\ \text{s.c.} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \end{cases}$$

1. Résoudre le problème $(P7)$ en éliminant une variable à l'aide de la contrainte $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$, puis traiter les variables qui restent sans contraintes;
2. Résoudre le problème $(P7)$ en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Exercice 7. Considérons le problème $(P8)$ suivant:

$$(P8) \quad \begin{cases} min\ f(x,y,z) = -yz - xy, \\ h_1(x,y,z) = xy - 1 = 0, \\ h_2(x,y,z) = y^2 + z^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

Résoudre le problème $(P8)$ en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Exercice 8. Considérons le problème $(P9)$ suivant:

$$(P9) \quad \begin{cases} min\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2, \\ h(x,y) = x - y - 2 = 0, \\ g(x,y) = x + y - 1 \leq 0, \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

1. Montrer que le problème $(P9)$ admet une solution unique;
2. Résoudre le problème $(P9)$ en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Exercice 9. Le but est de déterminer la projection du point $X^0 = (2,1,1)^t$ sur le sous-ensemble C de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$C = \{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 1 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

1. Modéliser ce problème sous forme d'un problème d'optimisation.
2. Résoudre le problème (de minimisation avec contraintes) obtenu.

Exercice 10. On cherche à calculer la distance d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ au plan défini par l'équation $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p,n)$, avec $Rang\ A = p$. Ce problème se pose sous la forme:

$$(P10) \quad \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x_0 - x\|^2 \\ \\ Ax = b \end{cases}$$

1. Montrer que la solution x^* et le vecteur λ^* (multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes) de ce problème vérifient le système d'optimalité suivant:

$$\begin{cases} (x^* - x_0) + A^t\lambda^* = 0, \\ Ax = b, \end{cases}$$

2. Ecrire λ^* en fonction de A, A^t, x_0 et b;

3. En déduire l'expression de x^*.

Exercice 11. Considérons le problème de minimisation suivant:

$$(P11) \quad \begin{cases} min\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz, \\ \text{s.c.} \quad h_1(x,y,z) = x - z = 0, \\ \qquad\quad h_2(x,y,z) = y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Résoudre le problème $(P11)$ par la méthode de Lagrange-Newton.

Exercice 12. Résoudre le problème $(P12)$ ci-dessous en utilisant la méthode de pénalités extérieures:

$$(P12) \quad \begin{cases} min\ f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y, \\ \text{s.c.} \quad h(x,y) = x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Exercice 13. Considérons le problème $(P13)$ de minimisation suivant:

$$(P13) \quad \begin{cases} \quad min\ f(x), & \\ h_i(x) = 0, & i = 1, \dots, p; \\ g_j(x) \leq 0, & j = 1, \dots, q. \end{cases}$$

Le Lagrangien de ce problème est alors

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\ h_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j\ g_j(x)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^+)^q$, avec $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $\mu = (\mu_1, \dots \mu_q)$.
On appelle **point selle** de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^+)^q$ tout triplet $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^+)^q$ vérifiant l'équation

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) \ \leq\ \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \ \leq\ \mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*)$$

pour tous $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^+)^q$.

1. Montrer que si f, g et h sont $\mathcal{C}^1$ et que le triplet $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^+)^q$ est un point selle de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^+)^q$, alors ce triplet vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

2. Montrer que si f, g et h sont convexes et $\mathcal{C}^1$. Alors le triplet $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^+)^q$ est un point selle de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^+)^q$ si et seulement si il vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

3. Les résultats précédent ont permis de développer l'algorithme d'Uzawa donné ci-dessous:

   (1) **Initialisation**
   $k = 0$: choix de $\lambda^0 \in \mathbb{R}^p$ et de $\mu^0 \in (\mathbb{R}^+)^q$

   (2) **Iteration** k
   $\lambda^k = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_p^k) \in \mathbb{R}^p$ et $\mu^k = (\mu_1^k, \ldots \mu_q^k) \in (\mathbb{R}^+)^q$ sont connus; puis
   (a) Calcul de x^k solution de

$$(P^k) \qquad min\ \mathcal{L}(x, \lambda^k, \mu^k),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

   (b) Calcul de λ^{k+1} et μ^{k+1} avec:

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \rho\ h_i(x^k), \quad i = 1, \ldots, p$$

$$\mu_j^{k+1} = max(0, \mu_j^k + \rho\ g_j(x^k)), \quad j = 1, \ldots, q.$$

   Où $\rho > 0$ est un réel fixé (choisi par l'utilisateur).

   (3) **Critère d'arrêt**
   Si $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$, STOP. Sinon, on pose $k = k + 1$ et on retourne à (2).

   Résoudre en utilisant l'algorithme d'Uzawa le problème ci-dessous (prendre $\lambda^0 = 0,\ \rho = 1$ et $\varepsilon = 10^{-6}$):

$$(P14) \quad \begin{cases} min\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \\ \quad s.c. \quad x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$